KZU • Mathematik • G. Wick

Schwingungen und Töne

Theorie

Dritter Teil

Sommer 2001

(einige Kleinigkeiten verändert im Winter 2008)

Inhaltsverzeichnis

14. SIEBENTONLEITERN

Konzept

1) Die Oktav ist immer rein. Sie hat einen multiplikativen Wert von 2 und einen additiven Wert von 1200 CENT.
2) Der Tonvorrat («Stimmung») ist eine Folge von Tönen (eigentlich: Frequenzen), die oktavperiodisch ist. Das heißt: Mit jeder Frequenz f gehören auch die Frequenzen $f \cdot 2$ und $f:2$ zur Stimmung.
3) Unter einer Leiter (Skala) verstehen wir eine Auswahl aus der Stimmung. Diese Auswahl deckt eine Oktav ab.
4) Jeder Ton der Stimmung hat einen «oktavversetzten» Vertreter in der Leiter.

Die pythagoräische C-Dur-Tonleiter

Tragender Baustein dieser Leiter ist die reine Quint. Sie hat einen multiplikativen Wert von 1.5 und einen additiven Wert von etwa 701.955 CENT.
Als Startton («Tonika») wird c gewählt. Seine Frequenz soll hier der Einfachheit halber Maß für alle Frequenzen sein.
Von c aus steigen wir 1 Quint abwärts (d.h.: teilen durch 1.5) und 5 Quinten aufwärts (d.h.: je multiplizieren mit 1.5).

F	c	g	d^1	a^1	e^2	h^2
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$

Als Bereich für die Leiter wählen wir: **c.....c¹**

1.....2

und bestimmen die oktavversetzten Vertreter:

$$\mathbf{F}:\ \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{\cdot 2} \rightarrow \mathbf{f}:\ \frac{4}{3}$$

$$\mathbf{d^1}:\ \frac{9}{4} \rightarrow \boxed{:2} \rightarrow \mathbf{d}:\ \frac{9}{8}$$

$$\mathbf{a^1}:\ \frac{27}{8} \rightarrow \boxed{:2} \rightarrow \mathbf{a}:\ \frac{27}{16}$$

$$\mathbf{e^2}:\ \frac{81}{16} \rightarrow \boxed{:2} \rightarrow \mathbf{e^1}:\ \frac{81}{32} \rightarrow \boxed{:2} \rightarrow \mathbf{e}:\ \frac{81}{64}$$

$$\mathbf{h^2}:\ \frac{243}{32} \rightarrow \boxed{:2} \rightarrow \mathbf{h^1}:\ \frac{243}{64} \rightarrow \boxed{:2} \rightarrow \mathbf{h}:\ \frac{243}{128}$$

Damit sieht unsere Leiter so aus:

c^1	2			
	$\uparrow$	$\cdot \frac{256}{243}$	$=$	β
h	$\frac{243}{128}$			
	$\uparrow$	$\cdot \frac{9}{8}$	$=$	α
a	$\frac{27}{16}$			
	$\uparrow$	$\cdot \frac{9}{8}$	$=$	α
g	$\frac{3}{2}$			
	$\uparrow$	$\cdot \frac{9}{8}$	$=$	α
f	$\frac{4}{3}$			
	$\uparrow$	$\cdot \frac{256}{243}$	$=$	β
e	$\frac{81}{64}$			
	$\uparrow$	$\cdot \frac{9}{8}$	$=$	α
d	$\frac{9}{8}$			
	$\uparrow$	$\cdot \frac{9}{8}$	$=$	α
c	1			

Es gibt nur zwei verschiedene Tonschritte (das sind Intervalle zwischen benachbarten Tönen einer Leiter):
einen Halbton (kleine Sekund), den wir hier mit β bezeichnen,
und einen Ganzton (große Sekund), den wir hier mit α bezeichnen.

Merke: $\boxed{\beta^2 \neq \alpha}$

Es folgt nun die Liste aller in dieser Stimmung möglichen Grundintervalle – das sind Intervalle mit Werten von 1 bis 2.

Merke: Es gibt genau 12 von der Prim verschiedene Intervalle.

Die eckigen Klammern rechts sollen Pärchen andeuten, welche sich gegenseitig zu einer Oktav ergänzen. Beispiele:

große Sext · kleine Terz = Oktav

Quart · Quint = Oktav

Man sagt auch: Die Quart ist der «Schatten» der Quint.

Name		**mult. Wert**	**add. Wert**
Oktav	$\alpha^5 \cdot \beta^2$	$\frac{2}{1}$	1200.000
große Septim	$\alpha^5 \cdot \beta^1$	$\frac{243}{128}$	1109.775
kleine Septim	$\alpha^4 \cdot \beta^2$	$\frac{16}{9}$	996.090
große Sext	$\alpha^4 \cdot \beta^1$	$\frac{27}{16}$	905.865
kleine Sext	$\alpha^3 \cdot \beta^2$	$\frac{128}{81}$	792.180
Quint	$\alpha^3 \cdot \beta^1$	$\frac{3}{2}$	701.955
Tritonus	$\alpha^3 \cdot \beta^0$	$\frac{729}{512}$	611.730
Quart	$\alpha^2 \cdot \beta^1$	$\frac{4}{3}$	498.045
große Terz	$\alpha^2 \cdot \beta^0$	$\frac{81}{64}$	407.820
kleine Terz	$\alpha^1 \cdot \beta^1$	$\frac{32}{27}$	294.135
Ganzton	$\alpha^1 \cdot \beta^0$	$\frac{9}{8}$	203.910
Halbton	$\alpha^0 \cdot \beta^1$	$\frac{256}{243}$	90.225
Prim	$\alpha^0 \cdot \beta^0$	$\frac{1}{1}$	0.000

In unserer Leiter kommen diese 12 Intervalle zum Beispiel so vor:

Oktav	$c \to c^1$	Tritonus	$f \to h$
große Septim	$c \to h$	Quart	$c \to f$ $d \to g$ $e \to a$ $g \to c^1$
kleine Septim	$d \to c^1$	große Terz	$c \to e$ $f \to a$ $g \to h$
große Sext	$c \to a$	kleine Terz	$d \to f$ $e \to g$ $a \to c^1$
kleine Sext	$e \to c^1$	Ganzton	$c \to d$ $d \to e$ $f \to g$ $g \to a$ $a \to h$
Quint	$c \to g$ $d \to a$ $e \to h$ $f \to c^1$	Halbton	$e \to f$ $h \to c^1$

Die reine C-Dur-Tonleiter

Tragender Baustein dieser Leiter ist der reine «Dur-Dreiklang»

$$4 \quad : \quad 5 \quad : \quad 6$$

mit Frequenzen, die sich verhalten wie 4 : 5 : 6. Als Startton («Tonika») wird c^1 gewählt. Seine Frequenz soll hier der Einfachheit halber 264 Hz messen.

f	a	c^1	e^1	g^1	h^1	d^2	
176	220	264	330	396	495	594	Hz

Als Bereich für die Leiter wählen wir: **c^1.....c^2**

264....528 Hz

und bestimmen die oktavversetzten Vertreter:

$$\mathbf{f}: 176 \rightarrow \boxed{\cdot 2} \rightarrow 352 : \mathbf{f^1}$$

$$\mathbf{a}: 220 \rightarrow \boxed{\cdot 2} \rightarrow 440 : \mathbf{a^1}$$

$$\mathbf{d^1}: 297 \leftarrow \boxed{:2} \leftarrow 594 : \mathbf{d^2}$$

Damit sieht unsere Leiter so aus:

c^2	528			
	↑	$\cdot \frac{16}{15}$	=	β
h^1	495			
	↑	$\cdot \frac{9}{8}$	=	α
a^1	440			
	↑	$\cdot \frac{10}{9}$	=	α'
g^1	396			
	↑	$\cdot \frac{9}{8}$	=	α
f^1	352			
	↑	$\cdot \frac{16}{15}$	=	β
e^1	330			
	↑	$\cdot \frac{10}{9}$	=	α'
d^1	297			
	↑	$\cdot \frac{9}{8}$	=	α
c^1	264			

Es gibt drei verschiedene Tonschritte:
einen Halbton (kleine Sekund), den wir hier mit β bezeichnen,
und zwei Ganztöne (große Sekunden),

- einen großen Ganzton, den wir hier mit α bezeichnen;
- einen kleinen Ganzton, den wir hier mit α' bezeichnen;

Merke: $\boxed{\beta^2 \neq \alpha}$ $\boxed{\beta^2 \neq \alpha'}$

Es folgt eine Liste von – in dieser Stimmung möglichen – Grundintervallen:

Name		**mult. Wert**	**add. Wert**	
Oktav	$\alpha^3 \cdot \alpha'^2 \cdot \beta^2$	$\frac{2}{1}$	1200.000	pythagoräisch
:	:	:	:	
Quint	$\alpha^2 \cdot \alpha'^1 \cdot \beta^1$	$\frac{3}{2}$	701.955	pythagoräisch
Quint	$\alpha^1 \cdot \alpha'^2 \cdot \beta^1$	$\frac{40}{27}$	680.449	
Tritonus	$\alpha^2 \cdot \alpha'^1 \cdot \beta^0$	$\frac{45}{32}$	590.224	
Quart	$\alpha^2 \cdot \alpha'^0 \cdot \beta^1$	$\frac{27}{20}$	512.551	
Quart	$\alpha^1 \cdot \alpha'^1 \cdot \beta^1$	$\frac{4}{3}$	498.045	pythagoräisch
große Terz	$\alpha^1 \cdot \alpha'^1 \cdot \beta^0$	$\frac{5}{4}$	386.314	
kleine Terz	$\alpha^1 \cdot \alpha'^0 \cdot \beta^1$	$\frac{6}{5}$	315.641	
kleine Terz	$\alpha^0 \cdot \alpha'^1 \cdot \beta^1$	$\frac{32}{27}$	294.135	pythagoräisch
Ganzton	$\alpha^1 \cdot \alpha'^0 \cdot \beta^0$	$\frac{9}{8}$	203.910	pythagoräisch
Ganzton	$\alpha^0 \cdot \alpha'^1 \cdot \beta^0$	$\frac{10}{9}$	182.404	
Halbton	$\alpha^0 \cdot \alpha'^0 \cdot \beta^1$	$\frac{16}{15}$	111.731	
Prim	$\alpha^0 \cdot \alpha'^0 \cdot \beta^0$	$\frac{1}{1}$	0.000	

Merke: $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{81}{80} =$ syntonisches Komma

Die C-Dur-Tonleiter «7-aus-12-gleichen»

Wir bezeichnen diese Leiter kürzer als «Klavier-C-Dur-Leiter» .
Tragender Baustein ist der einzige Halbton ζ.

Sein multiplikativer Wert ist $\sqrt[12]{2} \approx 1.059463$.
Sein additiver Wert ist 100 CENT. Alle anderen Intervalle sind Potenzen von ζ.

c . d . e f . g . a . h c1

Als Tonschritte kommen vor: ein Halbton ζ und ein Ganzton ζ^2.

Es folgt die Liste aller in dieser Stimmung möglichen Grundintervalle:

Name		**mult. Wert**	**add. Wert**
Oktav	ζ^{12}	2.000	1200.000
große Septim	ζ^{11}	1.888	1100.000
kleine Septim	ζ^{10}	1.782	1000.000
große Sext	ζ^{9}	1.682	900.000
kleine Sext	ζ^{8}	1.587	800.000
Quint	ζ^{7}	1.498	700.000
Tritonus	ζ^{6}	1.414	600.000
Quart	ζ^{5}	1.335	500.000
große Terz	ζ^{4}	1.260	400.000
kleine Terz	ζ^{3}	1.189	300.000
Ganzton	ζ^{2}	1.122	200.000
Halbton	ζ^{1}	1.059	100.000
Prim	ζ^{0}	1.000	0.000

Die C-Dur-Tonleiter «7-aus-31-gleichen»

Tragender Baustein ist das Intervall ω.

Sein multiplikativer Wert ist $\sqrt[31]{2} \approx 1.022611$.

Sein additiver Wert ist etwa 38.71 CENT.

Alle anderen Intervalle sind Potenzen von ω.

`c....d....e..f....g....a....h..c1`

Als Tonschritte kommen vor: ein Halbton ω^3 und ein Ganzton ω^5.

Merke: $\boxed{(\omega^3)^2 \neq \omega^5}$

Es folgt die Liste aller in dieser Stimmung möglichen Grundintervalle:

Name		**mult. Wert**	**add. Wert**
Oktav	ω^{31}	2.0000	1200.000
große Septim	ω^{28}	1.8702	1083.871
kleine Septim	ω^{26}	1.7884	1006.452
große Sext	ω^{23}	1.6724	890.323
kleine Sext	ω^{21}	1.5993	812.903
Quint	ω^{18}	1.4955	696.774
Tritonus	ω^{15}	1.3985	580.645
Quart	ω^{13}	1.3373	505.226
große Terz	ω^{10}	1.2506	387.097
kleine Terz	ω^{8}	1.1959	309.677
Ganzton	ω^{5}	1.1830	193.548
Halbton	ω^{3}	1.0694	116.129
Prim	ω^{0}	1.0000	0.000

Wir lassen nun die Liste aller in dieser Stimmung möglichen Grundintervalle folgen:

NAME		WERT	$\text{WERT}_{\text{CENT}}$	
Oktav	ω^{31}	2.0000	1200.00	
große Septim	ω^{28}	1.8702	1087.87	
kleine Septim	ω^{26}	1.7884	1006.45	
große Sext	ω^{23}	1.6724	890.32	
kleine Sext	ω^{21}	1.5993	812.90	
Quint	ω^{18}	1.4955	696.77	*)
Tritonus	ω^{15}	1.3985	580.65	
Quart	ω^{13}	1.3373	503.23	
große Terz	ω^{10}	1.2506	387.10	**)
kleine Terz	ω^{8}	1.1959	309.68	
Ganzton	ω^{5}	1.1183	193.55	
Halbton	ω^{3}	1.0694	116.13	
Prim		1.0000	0.00	

*) Diese Quint ist reiner als $\frac{40}{27}$, also reiner als die schlechtere der beiden Quinten der reinen C-Dur-Leiter.

**) Diese große Terz ist fast rein.

15. PYTHAGORÄISCHE LEITERN MIT MEHR ALS SIEBEN TÖNEN

Anlass zu Leitern mit mehr als sieben Tönen sind zum Beispiel Tonikawechsel. Dabei möchte man mit möglichst wenig Aufwand aus einer bestehenden Dur-Tonleiter eine analoge Dur-Tonleiter mit einer neuen Tonika konstruieren.

Ausgehend von der pythagoräischen **c**-Dur-Tonleiter

F	**c**	**g**	**d**^{1}	**a**^{1}	**e**^{2}	**h**^{2}
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$

kann man zum Beispiel nach links rutschen:

^{1}**B**	**F**	**c**	**g**	**d**^{1}	**a**^{1}	**e**^{2}
$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$

Diese Dur-Tonleiter hat **F** als Tonika.

Man kann aber zum Beispiel auch nach rechts rutschen:

c	**g**	**d**^{1}	**a**^{1}	**e**^{2}	**h**^{2}	**fis**^{3}
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$

Diese Dur-Tonleiter hat **g** als Tonika.

Das Rutschen kann nun auf beiden Seiten weitergeführt werden.

Exkurs

Spätestens an dieser Stelle ist es aber angebracht zu den Tonnamen der internationalen Konvention überzugehen.

Die Tonnamen H und h werden ersetzt durch B. Alle Tonnamen werden groß geschrieben: C D E F G A B.

Die Endungen -es und -s werden durch ein ♭, die Endung -is durch ein ♯ ersetzt.

3A	2A	1A	A	a	a1	a2	a3
werden ersetzt durch							
A–2	A–1	A0	A1	A2	A3	A4	A5

Die von c ausgehende Quintenfolge wird dann so übersetzt:

ais^5	dis^5	gis^4	cis^4	fis^3
A♯7	D♯7	G♯6	C♯6	F♯5
h^2	e^2	a^1	d^1	g
B4	E4	A3	D3	G2
c	F	^{1}B	^{1}Es	^{2}As
C2	F1	B0	E0	A♭–1
^{2}Des	^{3}Ges	^{4}Ces	^{4}Fes	
D♭–1	G♭–2	C♭–3	F♭–3	

Sollte – nach der früher erwähnten Art – jeder bereits vorkommende Ton Tonika einer neuen (korrekt pythagoräischen) Dur-Leiter sein können, müsste der Tonvorrat endlos sein.

Die auf der nächsten Seite beginnenden –auf zwei Seiten verteilten – Tabellen beinhalten:

Töne in Quintenfolge			
Name Ton	**Frequenz gestapelt**	**Oktav Anzahl**	**Frequenz transponiert**

Vertreter in **einer** Oktav			
Name Ton	**Frequenz transponiert**	**Frequenz [CENT]**	**Differenz [CENT]**

↓ ↓ ↓

Als Maß für die Frequenz wird die Frequenz von C0 benützt.

Die transponierten Frequenzen erhält man durch Oktavversetzung.

- Bei einer Oktavversetzung nach unten wird – sooft wie es die Oktav-Anzahl angibt – durch 2 dividiert.
- Bei einer Oktavversetzung nach oben wird – sooft wie es die Oktav-Anzahl angibt – mit 2 multipliziert.

Bei den Vertretern in der Oktav von C0 bis C1 sind noch die CENT-Maße angegeben, und in diesem Maß die Differenzen von Ton zu Ton.

Töne in Quintenfolge			
Name Ton	**Frequenz gestapelt**	**Oktav Anzahl**	**Frequenz transponiert**
B♯♯♯	37876.752	15	1.155907
E♯♯♯	25251.168	14	1.541209
A♯♯♯	16834.112	14	1.027473
D♯♯♯	11222.741	13	1.369964
G♯♯♯	7481.827	12	1.826618
C♯♯♯	4987.885	12	1.217745
F♯♯♯	3325.256	11	1.623661
B♯♯	2216.837	11	1.082440
E♯♯	1477.891	10	1.443254
A♯♯	985.261	9	1.924338
D♯♯	656.840	9	1.282892
G♯♯	437.893	8	1.710523
C♯♯	291.929	8	1.140349
F♯♯	194.619	7	1.520465
B♯	129.746	7	1.013643
E♯	86.497	6	1.351524
A♯	57.665	5	1.802032
D♯	38.443	5	1.201355
G♯	25.628	4	1.601807
C♯	17.085	4	1.067871
F♯	11.390	3	1.423828
B	7.593	2	1.898438
E	5.062	2	1.265625
A	3.375	1	1.687500
D	2.250	1	1.125000
G	1.500	0	1.500000
C	1.000	0	1.000000

Vertreter in **einer** Oktav			
Name Ton	**Frequenz transponiert**	**Frequenz [CENT]**	**Differenz [CENT]**
D♭♭	1.973081	1176.54	23.46
A♯♯	1.924338	1133.24	43.30
B	1.898438	1109.78	23.46
C♭	1.872885	1086.31	23.46
D♭♭♭	1.847677	1062.85	23.46
G♯♯♯	1.826618	1043.01	19.84
A♯	1.802032	1019.55	23.46
B♭	1.777778	996.09	23.46
C♭♭	1.753850	972.63	23.46
G♯♯	1.710523	929.33	43.30
A	1.687500	905.87	23.46
B♭♭	1.664787	882.40	23.46
C♭♭♭	1.642379	858.94	23.46
F♯♯♯	1.623661	839.10	19.84
G♯	1.601807	815.64	23.46
A♭	1.580247	792.18	23.46
B♭♭♭	1.558977	768.72	23.46
E♯♯♯	1.541209	748.88	19.84
F♯♯	1.520465	725.42	23.46
G	1.500000	701.96	23.46
A♭♭	1.479811	678.49	23.46
E♯♯	1.443254	635.19	43.30
F♯	1.423828	611.73	23.46
G♭	1.404664	588.27	23.46
A♭♭♭	1.385758	564.81	23.46
D♯♯♯	1.369964	544.97	19.84
E♯	1.351524	521.51	23.46

Töne in Quintenfolge			
Name Ton	**Frequenz gestapelt**	**Oktav Anzahl**	**Frequenz transponiert**
F	0.6667	–1	1.333333
B♭	0.4444	–2	1.777778
E♭	0.2963	–2	1.185185
A♭	0.1975	–3	1.580247
D♭	0.1317	–3	1.053498
G♭	0.0878	–4	1.404664
C♭	0.0585	–5	1.872885
F♭	0.0390	–5	1.248590
B♭♭	0.0260	–6	1.664787
E♭♭	0.0173	–6	1.109858
A♭♭	0.0116	–7	1.479811
D♭♭	0.0077	–8	1.973081
G♭♭	0.0051	–8	1.315387
C♭♭	0.0034	–9	1.753850
F♭♭	0.0023	–9	1.169233
B♭♭♭	0.0015	–10	1.558977
E♭♭♭	0.0010	–10	1.039318
A♭♭♭	0.0007	–11	1.385758
D♭♭♭	0.0005	–12	1.847677
G♭♭♭	0.0003	–12	1.231785
C♭♭♭	0.0002	–13	1.642379
F♭♭♭	0.0001	–13	1.094920

Vertreter in **einer** Oktav			
Name Ton	**Frequenz transponiert**	**Frequenz [CENT]**	**Differenz [CENT]**
F	1.333333	498.04	23.46
G♭♭	1.315387	474.58	23.46
D♯♯	1.282892	431.28	43.30
E	1.265625	407.82	23.46
F♭	1.248590	384.36	23.46
G♭♭♭	1.231785	360.90	23.46
C♯♯♯	1.217745	341.06	19.84
D♯	1.201355	317.60	23.46
E♭	1.185185	294.13	23.46
F♭♭	1.169233	270.67	23.46
B♯♯♯	1.155907	250.83	19.84
C♯♯	1.140349	227.37	23.46
D	1.125000	203.91	23.46
E♭♭	1.109858	180.45	23.46
F♭♭♭	1.094920	156.99	23.46
B♯♯	1.082440	137.15	19.84
C♯	1.067871	113.69	23.46
D♭	1.053498	90.22	23.46
E♭♭♭	1.039318	66.76	23.46
A♯♯♯	1.027473	46.92	19.84
B♯	1.013643	23.46	23.46
C	1.000000	0.00	23.46

Wie bereits gesagt: Nur mit einem unendlich großen Tonvorrat wäre es möglich, dass jeder bereits vorkommende Ton Tonika einer neuen (korrekt pythagoräischen) Dur-Leiter werden könnte. Für Instrumente mit Tasten (z.B. Spinett) oder mit Bünden (z.B. Gitarre) ist also eine Einschränkung unumgänglich.

Eine erste Einschränkung ist die auf ***21 Töne***, nämlich von B♯ bis F♭ in der absteigenden Quintenfolge.

Diese neue Leiter ist dann ***pythagoräisch*** und ***«vollständig diatonisch-chromatisch-enharmonisch»***.

– ***diatonisch***: sie enthält die über die Ganztöne hinweg führende C-Dur-Leiter;

– ***chromatisch***: die größten Tonschritte in der Leiter sind Halbtöne;

– ***enharmonisch***: D♭ und C♯, A♭ und G♯, E♭ und D♯ u.s.w. werden unterschieden.

Töne in Quintenfolge			
Name Ton	**Frequenz gestapelt**	**Oktav Anzahl**	**Frequenz transponiert**
B♯	129.7463	7	1.013643
E♯	86.4976	6	1.351524
A♯	57.6650	5	1.802032
D♯	38.4434	5	1.201355
G♯	25.6289	4	1.601807
C♯	17.0859	4	1.067871
F♯	11.3906	3	1.423828
B	7.5938	2	1.898438
E	5.0625	2	1.265625
A	3.3750	1	1.687500
D	2.2500	1	1.125000
G	1.5000	0	1.500000
C	1.0000	0	1.000000
F	0.6667	-1	1.333333
B♭	0.4444	-2	1.777778
E♭	0.2963	-2	1.185185
A♭	0.1975	-3	1.580247
D♭	0.1317	-3	1.053498
G♭	0.0878	-4	1.404664
C♭	0.0585	-5	1.872885
F♭	0.0390	-5	1.248590

Vertreter in **einer** Oktav			
Name Ton	**Frequenz transponiert**	**Frequenz [CENT]**	**Differenz [CENT]**
B	1.898438	1109.78	90.22
C♭	1.872885	1086.31	23.46
A♯	1.802032	1019.55	66.76
B♭	1.777778	996.09	23.46
A	1.687500	905.87	90.22
G♯	1.601807	815.64	90.22
A♭	1.580247	792.18	23.46
G	1.500000	701.96	90.22
F♯	1.423828	611.73	90.22
G♭	1.404664	588.27	23.46
E♯	1.351524	521.51	66.76
F	1.333333	498.04	23.46
E	1.265625	407.82	90.22
Fb	1.248590	384.36	23.46
D♯	1.201355	317.60	66.76
E♭	1.185185	294.13	23.46
D	1.125000	203.91	90.22
C♯	1.067871	113.69	90.22
D♭	1.053498	90.22	23.46
B♯	1.013643	23.46	66.76
C	1.000000	0.00	23.46

Die Färbungen in der Spalte ganz links zeigen an, warum zum Beispiel C♯ -Dur (also Cis-Dur) sieben Töne mit einem ♯ enthält, und warum E♭ -Dur (also Es-Dur) drei Töne mit einem ♭ enthält.

In dieser pythagoräischen 21-Tonleiter ist zwar

- G♯ höher als A♭, aber nur um ein Intervall κ, das 23.46 CENT misst.
- E♯ höher als F, aber nur um ein Intervall κ, das 23.46 CENT misst.
- B höher als C♭, aber nur um ein Intervall κ, das 23.46 CENT misst.

u.s.w.

Neun mal sind sich zwei Töne der Leiter zum Verwechseln ähnlich.

Deshalb ist – ohne allzu große Unstimmigkeiten – eine weitere Einschränkung auf ***zwölf Töne*** möglich. Von jedem der Pärchen – aus zwei zum Verwechseln ähnlichen Tönen – lässt man jeweils nur einen Ton in der Leiter. Es bleiben so noch 12 Töne. Beispiel:

Töne in Quintenfolge			
Name Ton	**Frequenz gestapelt**	**Oktav Anzahl**	**Frequenz transponiert**
G♯	25.6289	4	1.601807
C♯	17.0859	4	1.067871
F♯	11.3906	3	1.423828
B	7.5938	2	1.898438
E	5.0625	2	1.265625
A	3.3750	1	1.687500
D	2.2500	1	1.125000
G	1.5000	0	1.500000
C	1.0000	0	1.000000
F	0.6667	-1	1.333333
B♭	0.4444	-2	1.777778
E♭	0.2963	-2	1.185185

Vertreter in **einer** Oktav			
Name Ton	**Frequenz transponiert**	**Frequenz [CENT]**	**Differenz [CENT]**
B	1.898438	1109.78	90.22
B♭	1.777778	996.09	113.69
A	1.687500	905.87	90.22
G♯	1.601807	815.64	90.22
G	1.500000	701.96	113.69
F♯	1.423828	611.73	90.22
F	1.333333	498.04	113.69
E	1.265625	407.82	90.22
E♭	1.185185	294.13	113.69
D	1.125000	203.91	90.22
C♯	1.067871	113.69	90.22
C	1.000000	0.00	113.69

In diesem Fall sind nur noch B♭-Dur, F-Dur, C-Dur, G-Dur, D-Dur und A-Dur korrekt pythagoräisch.

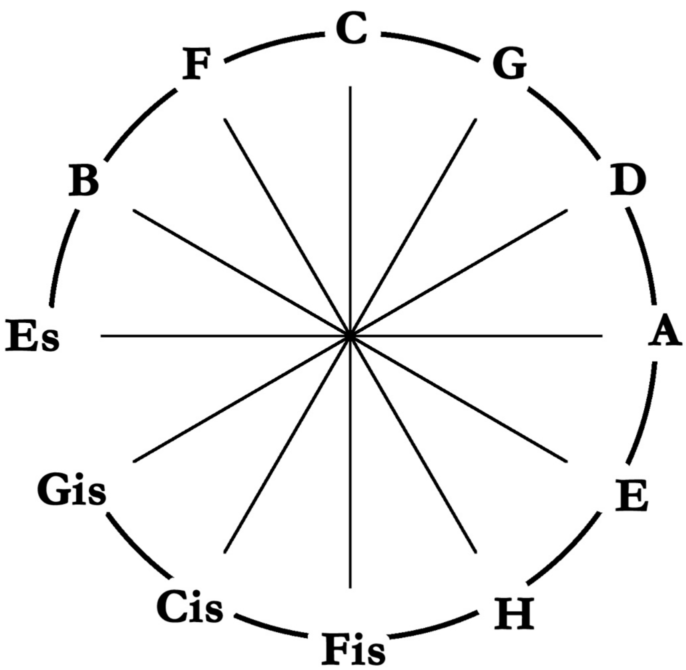
In E-Dur zum Beispiel wird statt D♯ (Dis) ein E♭ (Es) gespielt, was man eine ***enharmonische Verwechslung*** nennt. Das «wahre» D♯ (Dis) wäre um das Intervall κ höher als das gespielte E♭ (Es).

Das Intervall κ hat den multiplikativen Wert $\frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643$.

In der aufsteigenden Quintenfolge werden von E♭ (Es) bis D♯ (Dis) nämlich zwölf Quinten und etwas mehr als 7 Oktaven überwunden.

Frequenz(D♯) : Frequenz(E♭)	=	$1.5^{12} : 2^7$
	=	$3^{12} : 2^{19}$
	=	κ
	=	pythagoräisches Komma

Bei der Einschränkung auf 12 Töne schließt man einen Kreis, der – korrekt pythagoräisch – gar nicht geschlossen werden dürfte:



Dieser Kreis der zwölf Quinten, ist der so genannte «Quintenzirkel».
Elf der Quinten sind rein. Nur die Quint von G♯ (Gis) nach E♭ (Es) ist um das pythagoräische Komma (etwa 23.460 CENT) kleiner als eine reine Quint.
Die reinen Quinten messen etwa 701.955 CENT.
Die Quint von G♯ nach E♭ misst etwa 678.495 CENT.

Die Quint von G♯ nach E♭ ist unrein, «um einen Achtelton» wie man auch sagt, denn 23.460 CENT sind fast 25 CENT, was einen Achtel von den 200 CENT eines Ganztones ausmacht.
Diese Quint tönt denn auch sehr verstimmt. Man sagt, sie «heule wie ein Wolf», und nennt sie deshalb «Wolfsquint».

Die Verstimmung kann auch wie folgt veranschaulicht werden:
Man wählt für G♯ die Frequenz **f** = 202 Hz.
Die Frequenz von E♭ wird dann **g** = (202 · 1.5) : 1.013643, also etwa gleich 299 Hz.

Ihre Harmonischen 3**f** = 606 Hz und 2**g** ≈ 598 Hz werden eine Schwebung erzeugen, deren Schwebungsfrequenz (606–598) Hz also 8 Hz ist.

Für diese Zwölftonleiter gelten die folgenden Rechengesetze. Die in Klammern gesetzten Intervalle sind additiv beschrieben, also gemessen in CENT.

Erste Regel

11· 701.955 + 1· 678.495 = 7· 1200
11·(reine Quint) + 1·(Wolfsquint) = 7·(Oktav)
12 aufeinander folgende Quinten erzeugen die Oktav.

Zweite Regel

3· 701.955 + 1· 678.495 = 384.360 + 2400
3·(reine Quint) + 1·(Wolfsquint) æ (große Terz 1)

4· 701.955 = 407.820 + 2400
4·(reine Quint) æ (große Terz 2)
3 aufeinander folgende Quinten erzeugen eine Terz.

(große Terz 1) = 384.360 CENT
(große Terz 2) = 407.820 CENT

zum Vergleich: (reine große Terz) = 386.314 CENT
(Klavierterz) = 400.000 CENT

Dritte Regel

701.955 + 678.495 = 180.450 + 1200
(reine Quint) + (Wolfsquint) æ (Ganzton 1)

2· 701.955 = 203.910 + 1200
2·(reine Quint) æ (Ganzton 2)
2 aufeinander folgende Quinten erzeugen einen Ganzton

(Ganzton 1) = 180.450 CENT
(Ganzton 2) = 203.910 CENT = (9/8)

zum Vergleich: (10/9) = 182.404 CENT

16. DER STIMMUNGSKREIS ALS RECHENHILFE

Der Stimmungskreis ist ein etwas detaillierterer Quintenzirkel. Außen sind die 12 Quinten, innen die 12 großen Terzen angedeutet.
Der Stimmungskreis ist gedacht als Rahmen zur Darstellung von Zwölftonleitern.

Will man mit dem Stimmungskreis arbeiten, halte man sich and die folgenden Regeln

❶	12 Quinten in Folge	æ	1 Oktave
	12 Quinten in Folge	=	7 Oktaven
❷	4 Quinten in Folge	æ	1 große Terz
	4 Quinten in Folge	=	2 Oktaven und 1 Terz
❸	3 große Terzen in Folge	=	1 Oktav

Ein Beispiel für die Anwendung des Stimmungskreises ist die Erweiterung unserer reinen Siebentonleiter vom Kapitel 14 zu einer reinen Zwölftonleiter (**PURE MAJOR C**).
Am einfachsten rechnet man im CENT-Maß.

a	=	Oktav [CENT]	=	1200 [CENT]
q	=	reine Quint [CENT]	≈	702 [CENT]
t	=	reine große Terz [CENT]	≈	386 [CENT]

Alle Quinten und Terzen werden durch diese drei Grundgrößen dargestellt.

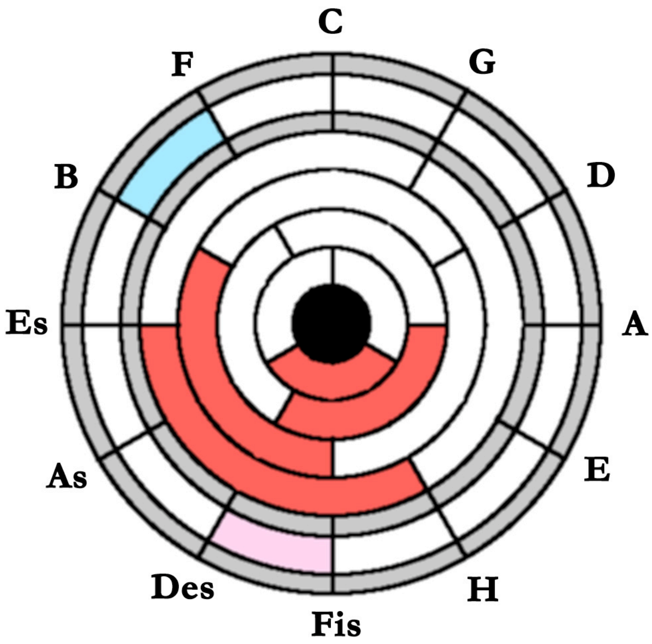
Die Quinten

Anzahl	Qualität	Term	[CENT] ≈	Farbe
9	rein	q	702	**WEISS**
2	zu klein	$2 \cdot a + t - 3 \cdot q$	680	**HELLBLAU**
1	zu groß	$3 \cdot a - 2 \cdot t - 3 \cdot q$	722	**HELLROT**

Die großen Terzen

Anzahl	Qualität	Term	[CENT] ≈	Farbe
8	rein	t	386	**WEISS**
4	zu groß	$a - 2 \cdot t$	427	**ROT**

Das sieht so aus:



17. ANDERE ZWÖLFTONSTIMMUNGEN

Auf den folgenden Seiten werden einige Stimmungen vorgestellt.

Links	stehen die Töne in der Quintenfolge. In der Spalte ***Quintentyp*** werden die Notationen a, q und t von Kapitel 16 benützt. Zur Kontrolle: Die Spaltensumme muss immer den Wert 7a haben
Rechts oben	stehen die Töne in der Halbtonfolge mit ihren Abweichungen von den entsprechenden Tönen der Klavierstimmung in CENT und in den sogenannten YAMAHA-EINHEITEN (64 YAMAHA-EINHEITEN entsprechen 100 CENT).
Rechts unten	ist eine mögliche Methode geschildert, mit der die Stimmung von Ohr gelegt werden kann.

Der Startwert für C ist so gewählt, dass der Mittelwert der Korrekturen Null ist.

Pythagoräische Stimmung mit Tonika C (PYTHAGOREAN C)

TON NAME	QUINTEN TYP	QUINTEN GRÖSSE [CENT]	ABWEI-CHUNG [CENT]
Cis			
	q	701.955	+2
Fis			
	q	701.955	+2
H			
	q	701.955	+2
E			
	q	701.955	+2
A			
	q	701.955	+2
D			
	q	701.955	+2
G			
	q	701.955	+2
C			
	q	701.955	+2
F			
	q	701.955	+2
B			
	q	701.955	+2
Es			
	7a-11q	678.495	-22
Gis			
	q	701.955	+2
Cis			

		UMSTIMMUNG (DETUNING) [CENT]	[YE]
	H	+5	+3
B		-9	-6
	A	+1	+1
Gis		+11	+7
	G	-3	-2
Fis		+7	+4
	F	-7	-4
	E	+3	+2
Dis		-11	-7
	D	-1	-1
Cis		+9	+6
	C	-5	-3

C	Ausgangspunkt		
G	Quint	C-G	rein
F	Quart	C-F	rein
D	Quart	D-G	rein
A	Quint	D-A	rein
E	Quart	E-A	rein
H	Quint	E-H	rein
Fis	Quint	H-Fis	rein
B	Quart	F-B	rein
Es	Quint	Es-B	rein
Cis	Quart	Cis-Fis	rein
Gis	Quint	Cis-Gis	rein

Reine Stimmung mit Tonika C (PURE MAJOR C)

TON NAME	QUINTEN TYP	QUINTEN GRÖSSE [CENT]	ABWEICHUNG [CENT]
Des			
	3a-2t-3q	721.508	+22
Fis			
	q	701.955	+2
H			
	q	701.955	+2
E			
	q	701.955	+2
A			
	2a+t-3q	680.449	-20
D			
	q	701.955	+2
G			
	q	701.955	+2
C			
	q	701.955	+2
F			
	2a+t-3q	680.449	-20
B			
	q	701.955	+2
Es			
	q	701.955	+2
As			
	q	701.955	+2
Des			

		UMSTIMMUNG (DETUNING) [CENT]	[YE]
	H	-13	-8
B		+17	+11
	A	-17	-11
As		+13	+8
	G	+1	+1
Fis		-11	-7
	F	-3	-2
	E	-15	-9
Es		+15	+9
	D	+3	+2
Des		+11	+7
	C	-1	-1

C	Ausgangspunkt		
G	Quint	C-G	rein
F	Quart	C-F	rein
D	Quart	D-G	rein
E	Terz	C-E	rein
A	Terz	F-A	rein
H	Terz	G-H	rein
Fis	Quint	H-Fis	rein
Es	Terz	Es-G	rein
B	Quint	Es-B	rein
As	Quart	Es-As	rein
Des	Quint	Des-As	rein

Mitteltönige Stimmung mit Tonika C (Mean Tone C)

TON NAME	QUINTEN TYP	QUINTEN GRÖSSE [CENT]	ABWEI-CHUNG [CENT]
Cis			
	(2a+t)/4	696.578	-3
Fis			
	(2a+t)/4	696.578	-3
H			
	(2a+t)/4	696.578	-3
E			
	(2a+t)/4	696.578	-3
A			
	(2a+t)/4	696.578	-3
D			
	(2a+t)/4	696.578	-3
G			
	(2a+t)/4	696.578	-3
C			
	(2a+t)/4	696.578	-3
F			
	(2a+t)/4	696.578	-3
B			
	(2a+t)/4	696.578	-3
Es			
	(6a-11t)/4	737.637	+38
Gis			
	(2a+t)/4	696.578	-3
Cis			

		UMSTIMMUNG (DETUNING) [CENT]	[YE]
	H	-9	-5
B		+15	+10
	A	-2	-1
Gis		-19	-12
	G	+5	+3
Fis		-12	-8
	F	+12	+8
	E	-5	-3
Es		+19	+12
	D	+2	+1
Cis		-15	-10
	C	+9	+5

C	Ausgangspunkt		
E	Terz	C-E	rein
G	Quint	C-G	-3
D	Quart	D-G	+3
A	Quart	E-A	+3
H	Terz	G-H	rein
Fis	Terz	D-Fis	rein
Cis	sext	Cis-A	rein
Gis	Terz	E-Gis	rein
F	Terz	F-A	rein
B	sext	D-B	rein
Es	Terz	Es-G	rein

Stimmung von Werckmeister mit Tonika C (WERCKMEISTER III C)

TON NAME	QUINTEN TYP	QUINTEN GRÖSSE [CENT]	ABWEI-CHUNG [CENT]
Des			
	q	701.955	+2
Ges			
	(7a–8q)/4	696.090	-4
H			
	q	701.955	+2
E			
	q	701.955	+2
A			
	(7a–8q)/4	696.090	-4
D			
	(7a–8q)/4	696.090	-4
G			
	(7a–8q)/4	696.090	-4
C			
	q	701.955	+2
F			
	q	701.955	+2
B			
	q	701.955	+2
Es			
	q	701.955	+2
As			
	q	701.955	+2
Des			

		UMSTIMMUNG (DETUNING) [CENT]	[YE]
	H	-1	-1
B		+3	+2
	A	-5	-3
As		-1	-1
	G	+3	+2
Ges		-5	-3
	F	+5	+3
	E	-3	-2
Es		+1	+1
	D	-1	-1
Cis		-3	-2
	C	+7	+4

C	Ausgangspunkt		
F	Quart	C-F	rein
B	Quart	F-B	rein
Es	Quint	Es-B	rein
As	Quart	Es-As	rein
Des	Quint	Des-As	rein
Ges	Quart	Des-Ges	rein
G	Quint	C-G	-4
D	Quart	D-G	+4
A	Quint	D-A	-4
E	Quart	E-A	rein
H	Quint	E-H	rein

Stimmung von Kirnberger mit Tonika C (Kirnberger III C)

TON NAME	QUINTEN TYP	QUINTEN GRÖSSE [CENT]	ABWEI-CHUNG [CENT]
Des			
	5a-7q-t	700.001	0
Fis			
	q	701.955	+2
H			
	q	701.955	+2
E			
	(2a+t)/4	696.578	-3
A			
	(2a+t)/4	696.578	-3
D			
	(2a+t)/4	696.578	-3
G			
	(2a+t)/4	696.578	-3
C			
	q	701.955	+2
F			
	q	701.955	+2
B			
	q	701.955	+2
Es			
	q	701.955	+2
As			
	q	701.955	+2
Des			

		UMSTIMMUNG (DETUNING) [CENT]	[YE]
	H	-5	-3
B		+3	+2
	A	-3	-2
As		-1	0
	G	+4	+2
Fis		-3	-2
	F	+5	+3
	E	-7	-4
Es		+1	+1
	D	0	0
Des		-3	-2
	C	+7	+5

	Ausgangspunkt		
C			
E	Terz	C-E	rein
G	Quint	C-G	-3
D	Quart	D-G	+3
A	Quint	D-A	-3
H	Quint	E-H	rein
Fis	Quint	H-Fis	rein
F	Quint	F-C	rein
B	Quart	F-B	rein
Es	Quint	Es-B	rein
As	Quart	Es-As	rein
Des	Quint	As-Des	rein

Stimmung von Vallotti mit Tonika C (VALLOTTI C)

TON NAME	QUINTEN TYP	QUINTEN GRÖSSE [CENT]	ABWEI-CHUNG [CENT]
Des			
	q	701.955	+2
Ges			
	(7a-6q)/6	698.045	-2
H			
	(7a-6q)/6	698.045	-2
E			
	(7a-6q)/6	698.045	-2
A			
	(7a-6q)/6	698.045	-2
D			
	(7a-6q)/6	698.045	-2
G			
	(7a-6q)/6	698.045	-2
C			
	q	701.955	+2
F			
	q	701.955	+2
B			
	q	701.955	+2
Es			
	q	701.955	+2
As			
	q	701.955	+2
Des			

		UMSTIMMUNG (DETUNING) [CENT]	[YE]
	H	-4	-3
B		+2	+1
	A	0	0
As		-2	-1
	G	+4	+3
Ges		-6	-4
	F	+4	+3
	E	-2	-1
Es		0	0
	D	+2	+1
Des		-4	-3
	C	+6	+4

C	Ausgangspunkt		
F	Quart	C-F	rein
B	Quart	F-B	rein
Es	Quint	Es-B	rein
As	Quart	Es-As	rein
Des	Quint	Des-As	rein
Ges	Quart	Des-Ges	rein
G	Quint	C-G	-2
D	Quart	D-G	+2
A	Quint	D-A	-2
E	Quart	E-A	+2
H	Quint	E-H	-2

Stimmung von Kellner mit Tonika C (KELLNER C)

TON NAME	QUINTEN TYP	QUINTEN GRÖSSE [CENT]	ABWEICHUNG [CENT]
Des			
	q	701.955	+2
Ges			
	(7a-7q)/5	697.263	-3
H			
	q	701.955	+2
E			
	(7a-7q)/5	697.263	-3
A			
	(7a-7q)/5	697.263	-3
D			
	(7a-7q)/5	697.263	-3
G			
	(7a-7q)/5	697.263	-3
C			
	q	701.955	+2
F			
	q	701.955	+2
B			
	q	701.955	+2
Es			
	q	701.955	+2
As			
	q	701.955	+2
Des			

		UMSTIMMUNG (DETUNING) [CENT]	[YE]
	H	-3	-2
B		+3	+2
	A	–2	–1
As		-1	-1
	G	+4	+2
Ges		-5	-3
	F	+4	+3
	E	-4	-3
Es		+1	0
	D	+1	+1
Des		-3	-2
	C	+6	+4

	Ausgangspunkt		
C			
F	Quart	C-F	rein
B	Quart	F-B	rein
Es	Quint	Es-B	rein
As	Quart	Es-As	rein
Des	Quint	Des-As	rein
Ges	Quart	Des-Ges	rein
G	Quint	C-G	-3
D	Quart	D-G	+3
A	Quint	D-A	-3
E	Quart	E-A	+3
H	Quint	E-H	rein

18. STIMMUNG UND TEMPERATUR

Eine «Stimmung» ist das Resultat eines Stimmvorgangs, der dann abgeschlossen ist, wenn alles nach irgendwelchen Kriterien «stimmt».

Reine Stimmungen

Stimmungen werden üblicherweise als «rein (**PURE**)» bezeichnet, wenn die in ihr vertretenen Intervalle Werte haben vom Typ $\mathbf{2^r \cdot 3^s \cdot 5^t}$, wo r, s und t ganze Zahlen sind.
Unter ihnen werden jene als «pythagoräisch (**PYTHAGOREAN**)» bezeichnet, deren Intervalle Werte haben vom Typ $\mathbf{2^r \cdot 3^s}$, wo r und s ganze Zahlen sind (Fall $t = 0$).

Temperierte Stimmungen (Temperaturen)

Intervalle temperieren heißt, ihre Reinheit leicht dämpfen. Im mathematischen Sinn ist es ein Übergang zu gebrochenen Exponenten von 2, 3 und 5, also zu irrationalen Intervallen. Temperieren ist aber auch ein Ausgleichen. So werden anstelle von 11 **reinen** und einer **Wolfs**quint 12 **passable** Quinten gesetzt. Es folgen Beispiele. Die Notationen sind wie in den Kapiteln 16 und 17.

a = Oktav im CENT-Maß
q = reine Quint im CENT-Maß
t = reine große Terz im CENT-Maß
p = pythagoräisches Komma im CENT-Maß = 12q–7a
s = syntonisches Komma im CENT-Maß = 4q–a–t

Gleichschwebende / Gleichstufige (EQUAL) Temperatur

Für reine Quinten gilt bekanntlich: $\mathbf{12q - p = 7a}$.
Oder anders geschrieben: $\mathbf{11q + (q - p) = 7a}$,
wo die Klammer **(q–p)** die stark unreine Wolfsquint ist.
In der gleichschwebenden Temperatur wird die Wirkung des Kommas auf alle Quinten verteilt. Der Wert der neuen, temperierten Quint ist dann $\mathbf{\frac{7a}{12} = q - \frac{p}{12}}$.

Mitteltönige (MEAN TONE) Temperatur

Für reine Quinten und reine Terzen gilt: $\mathbf{4q - s = a + t}$.
Oder anders geschrieben: $\mathbf{3q + (q - s) = a + t}$,
wo dann **(q-s)** auch eine Art Wolfsquint ist.
In der mitteltönigen Stimmung wird die Wirkung des Kommas auf mehrere Quinten verteilt. Der Wert der neuen, temperierten Quint ist dann $\mathbf{\frac{a+t}{4} = q - \frac{s}{4}}$.

Die Quint ***soll ¼ Commat. schweben***, wie Werckmeister sagen würde.

Die Bezeichnung «mitteltönig» deutet die Tatsache an, dass der mitteltönige Ganzton das geometrische Mittel der beiden reinen Ganztöne ist.

$$\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8}$$

«Wohltemperierte» Stimmungen

Zitate:

"Darum ist höchst nötig / sonderlich einem Orgelmacher / dass er sich auf eine gute zulängliche Temperatur befleißige / denn wenn ein Orgelwerck noch so herrlich / und kostbar / und wäre nicht wohl temperiret oder mit vielen Semitonien beflicket und besudelt / so wollte man wenig Vergnügen und Ergetzlichkeit davon haben."

(Werckmeister, Orgel=Probe, Quedlinburg 1698)

***"Das wohl temperirte Clavier.
oder
Praeludia, und
Fugen durch alle Töne und Semitonia,
So wohl tertiam majorem oder UtReMi anlangend, als auch tertiam minorem oder Re
MiFa betreffend. Zum
Nutzen und Gebrauch der Lehr-begierigen
Musicalischen Jugend, als auch derer in diesem Studio schon habil seyenden besonderem
Zeitvertreib aufgesetzet
und verfertiget von
Johann Sebastian Bach.
p. t. Hochf. Anhalt-
Cöthenischen Capell-
Meistern und Directore derer
Cammer Musiquen.
Anno
1722."***

(Wortlaut des Titels des so genannten Volkmannschen Autographs des ersten Teils des «Wohltemperierten Klaviers», BWV 846-869)

Es scheint also der folgende Sprachgebrauch vorzuliegen:

❶ Stimmungen wurden «temperiert», um Modulationen durch alle 24 Dur- und Moll-Tonarten zu ermöglichen.

❷ «Wohltemperiert» war die Temperatur dann, wenn sich auch die Modulationen einigermaßen gut anhörten.

❸ «Wohltemperiert» wurden **alle** jene Temperaturen genannt, welche Punkt ❷ erfüllten.

Es sind also **viele** «wohltemperierte» Stimmungen möglich, die gleichschwebende ist **eine** davon.

19. ZUM BEGRIFF «GLEICHSCHWEBEND»

Zitate

" … und das D soll wieder ¼ Commat. schweben mit dem G. so muss denn …"
(Werckmeister, Musicalische Temperatur, Quedlinburg 1691)

" … 35. Diesem nach kann die Temperatur oder Schwebung auf unterschiedliche Weise gefunden werden / …"
(Werckmeister, Orgel=Probe, Quedlinburg 1698)

" … die gleich oder so genannte gleichschwebende Temperatur …"
(Sorge, Zuverläßige Anweisung, Leipzig und Lobenstein 1758)

" … In Wirklichkeit variiert ja die Schwebung jeder Intervallart in der gleichschwebenden Stimmung je nach der Tonhöhe, eine Tatsache, die man nur allzu leicht übersieht, weil man die hörende Aufmerksamkeit stets auf Intervallpaare richtet, die nur einen Halbton auseinanderstehen, wie z. B. C-E und Des-F . …"
(Lindley, Stimmung und Temperatur, Darmstadt 1987)

" SCHWEBUNG, f.: (...) oft in freierem gebrauche als bezeichnung einer geringen verschiedenheit oder abweichung, einer 'nuance', so in der musik als kunstausdruck von einer leichten unreinheit des tones, z. b. **der ton ist um eine schwebung zu tief,** ***und ähnliches; "***
(Grimm, Deutsches Wörterbuch, Leipzig 1899)

Die Fehldeutung

Es gibt heute Musiktheoretiker, welche den Begriff «gleichschwebend» als nicht ganz zutreffend ansehen. Das kommt daher, dass ***«gleichschwebend»*** verstanden wird als ***«mit gleicher Schwebungsfrequenz»***.
In dieser Interpretation bedeutet dann ***«alle Quinten schweben gleich»*** dasselbe wie: ***«bei allen Quinten ist dieselbe Schwebungsfrequenz wahrnehmbar»***.

Da dies offensichtlich nicht so ist, ersetzt man den Begriff durch vermeintlich bessere. Zum Beispiel durch «gleichstufig» oder durch «proportional-schwebend».

Die sprachliche Fehldeutung rührt daher, dass das Wort «Schwebung» heute belegt ist mit dem, was im Französischen «battement», im Englischen «beat» heißt. Diese Bedeutung ist nicht die ursprüngliche, und ist auch nicht gemeint in Aussagen wie der, dass «die Quinten alle gleich schweben» sollen. Und darum ist «equal-beating» eine sehr irreführende Übersetzung von «gleichschwebend», die man besser nicht gebrauchen sollte.

Die alten Bedeutungen

Die ursprünglichen Bedeutungen sind:

schweben	wie:	***nuer***
Schwebung	wie:	***nuance***

So würde dann die Schwebung eben das Häuchlein meinen, um das z.B. die Quinten von der reinen Quint abweichen. Und wenn die Quinten alle gleich (nach unten) schweben, heißt das nur, dass sie alle um das gleiche Häuchlein von der reinen Quint (nach unten) abweichen, nämlich um zirka 1.001129891 oder 1.955001509 CENT. Das pythagoräische Komma ist 1.013643265, das Häuchlein die zwölfte Wurzel davon, in alter Sprechweise «ein Zwölftel Commatis».
Analog würde dann "das D soll wieder ¼ Commat. schweben mit dem G"
meinen: Die Quint G-D soll ein Häuchlein von der reinen Quint abweichen, und dieses Häuchlein ist die vierte Wurzel des Kommas.

Zur Schwebungsfrequenz «gleichschwebender» Quinten

Quinten, die gleich schweben, haben nicht die gleiche Schwebungsfrequenz. Die Schwebungsfrequenz ist **proportional** zur Frequenz (z.B. des tieferen Tones).

Die Frequenz des tieferen Tones sei f.

Die Quint der gleichschwebenden Stimmung ist $\sqrt[12]{128} = \mathrm{W}$.
Die Frequenz des höheren Tones ist also $\mathrm{W} \cdot \mathrm{f}$.

Die dritte Harmonische zu f – nämlich $3 \cdot f$ – wird mit der zweiten Harmonischen von $W \cdot f$ – nämlich $2 \cdot W \cdot f$ – eine Schwebung mit der Frequenz N erzeugen.

$$N = 3 \cdot f - 2 \cdot W \cdot f$$
$$N = (3 - 2 \cdot W) \cdot f$$

Also: N proportional f

Beispiel:

tieferer Ton	f =	3 · f =	2 · W · f ≈	N ≈
d'	295.3	885.9	884.9	1
d''	590.6	1771.8	1769.8	2
a''	885.9	2657.7	2654.7	3
d'''	1181.2	3543.6	3539.6	4

Zum Schluss des dritten Theorieteils noch ein Zitat, das Fragen aufwirft, die nach einem neuen Verständnis für den «Wohlklang» im Bereich von «künstlichen» Tönen suchen:

> ***The more I experimented with alternative tunings, the more it appeared that certain kinds of scales sound good with some timbres and not with others. Certain kinds of timbres sound good in some scales and not in others.***
>
> ***This raised a host of questions: What is the relationship between the timbre of a sound and the intervals, scale, or tuning in which the sound appears "in tune?" Can this relationship be expressed in precise terms? Is there an underlying pattern?***
>
> (Sethares, Tuning · Timbre · Spectrum · Scale, London 2005)