KZU • Mathematik • G. Wick

Schwingungen und Töne

Theorie

Zweiter Teil

Sommer 2001

Inhaltsverzeichnis

10. INTERVALLE

Definition

Unterschiede in der Empfindung von Tonhöhen werden als **Intervalle** bezeichnet. Die bekanntesten Intervalle sind Oktav, Quint, Quart, Terz, Ganzton, Halbton. In unserer Empfindung ist das Aneinanderreihen von Intervallen vergleichbar mit dem **Addieren**.

TONHÖHE1	→	TONHÖHE2	→	TONHÖHE3
	OKTAV		QUINT	

TONHÖHE1	→	TONHÖHE3
	OKTAV + QUINT	

Nimmt man nun aber als Maß für die Tonhöhe die Frequenz, wird aus dem Addieren ein Multiplizieren.

Tonname	**C**	**→**	**c**	**→**	**c^1**	**→**	**c^2**	**→**	**c^3**
Intervall		**OKTAV**		**OKTAV**		**OKTAV**		**OKTAV**	
Frequenz	**64**	**→**	**128**		**256**	**→**	**512**	**→**	**1024**
Operation		**· 2**		**· 2**		**· 2**		**· 2**	

In diesem multiplikativen Sinn ist ein Intervall also ein **Faktor**, der mich von einer Frequenz zu einer anderen bringt. Oder anders ausgedrückt:

$$\textbf{Intervall von TON}_1\textbf{ zu TON}_2 = \frac{\textbf{Frequenz(TON}_2\textbf{)}}{\textbf{Frequenz(TON}_1\textbf{)}}$$

Intervalle sind dann also nicht Differenzen, sondern Quotienten (Verhältnisse).
zum Beispiel:

$$\frac{668\text{ Hz}}{334\text{ Hz}} = \frac{2}{1} = 2.0$$

$$\frac{220\text{ Hz}}{330\text{ Hz}} = \frac{2}{3} \quad 0.666'666'667$$

$$\frac{555\text{ Hz}}{222\text{ Hz}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\frac{400\text{ Hz}}{405\text{ Hz}} = \frac{80}{81} \quad 0.987'654'321$$

Intervalle im multiplikativen Sinn

Intervalle im multiplikativen Sinn nennt man «aufsteigend», wenn sie größer als 1, und «absteigend», wenn sie kleiner als 1 sind. Im Normalfall arbeiten wir mit aufsteigenden Intervallen.
Einige besondere Intervalle haben Namen. Zum Beispiel:

Prim		=	$\frac{1}{1}$	=	1.0000
Oktav	aufsteigend	=	$\frac{2}{1}$	=	2.0000
	absteigend	=	$\frac{1}{2}$	=	0.5000
reine Quint	aufsteigend	=	$\frac{3}{2}$	=	1.5000
	absteigend	=	$\frac{2}{3}$		0.6667
Klavierquint	aufsteigend	=	$\sqrt[12]{128}$		1.4983
reine Quart	absteigend	=	$\frac{3}{4}$	=	0.7500
große reine Terz	aufsteigend	=	$\frac{5}{4}$	=	1.2500
große Klavierterz	aufsteigend	=	$\sqrt[3]{2}$		1.2599
reine Duodezim	aufsteigend	=	$\frac{3}{1}$	=	3.0000
syntonisches Komma	aufsteigend	=	$\frac{81}{80}$	=	1.0125

Redewendungen und deren Präzisierung

Wenn Redewendungen aus der ***Welt der Intervalle im additiven Sinn*** in die ***Welt der Intervalle im multiplikativen Sinn*** übertragen werden, ist ganz besondere Vorsicht angezeigt.

additive Welt		***multiplikative Welt***
Ton2 ist eine Oktav höher als Ton1	⇔	Frequenz(Ton2) = 2 · Frequenz(Ton1)
eine reine Quint plus eine reine Quart ist eine Oktav	⇔	$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{1}$
3 große reine Terzen sind ungefähr eine Oktav	⇔	$\left(\frac{5}{4}\right)^3 \quad 2$
x ist ein Viertel des syntonischen Kommas	⇔	$x = \sqrt[4]{\frac{81}{80}}$

Das logarithmische Maß von Intervallen

Weil der Umgang mit Intervallen im multiplikativen Sinn unserem Gefühl nicht gut entspricht, wurde ein so genanntes logarithmisches Maß geschaffen. In diesem Maß wird dann addiert, wo vorher multipliziert wurde. Die Maßeinheit heißt CENT. Das Maß ist so eingerichtet, dass eine Oktav 1200 CENT, und Halbtöne auf einem Klavier 100 CENT messen. Digitale Keyboards haben ihre eigenen logarithmischen Maße. Auf solchen der Firma YAMAHA zum Beispiel ist der Halbton in 64 so genannte YAMAHA-Einheiten unterteilt.

Abmachung: Verwenden wir für Intervalle Variable wie x ohne Zusatz, so sollen sie im multiplikativen Sinn verstanden werden. Schreiben wir dagegen x_{CENT}, so ist x gemessen in der logarithmischen Maßeinheit CENT gemeint.
Für die Definition des logarithmischen Maßes braucht man den so genannten ***logarithmus binarius*** (abgekürzt: lb). Er ist die Umkehrung der Zweierpotenz. Das heißt:

x =	1	2	4	8	16	32	= $\mathbf{2^y}$
lb(y) =	0	1	2	3	4	5	= **y**

Damit wird das logarithmische Maß für Intervalle definiert:

$$\boxed{x_{CENT} = 1200 \cdot \text{lb}(x) \quad \text{bzw.} \quad 2^{\frac{x_{CENT}}{1200}} = x}$$

1. Aufgabe

Auf dem TI-83 gibt es keine Taste $\boxed{\text{LB}}$, wohl aber die verwandte Taste $\boxed{\text{LOG}}$ für den Zehnerlogarithmus. Damit lässt sich eine Funktion (z.B. Y_1), welche zu jedem x das passende x_{CENT} liefert so definieren:

$$\boxed{Y_1 = 1200 * \log(X)/\log(2)}$$

Definieren Sie diese Funktion. Stellen Sie im **Table SetUp** die Einstellung der **Independent Variable** auf **Ask**. Wechseln Sie dann auf **Table** und bestimmen Sie für einige x (z.B. für 1, 2, 4, 1.5, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$) das zugehörige Y_1, was x_{CENT} meint.

2. Aufgabe

Überprüfen Sie mit dem TI-83 die folgende Tabelle:

Intervallname	multiplikativer Wert	additiver Wert
Prim	1.0000	0.000 CENT
Oktav	2.0000	1200.000 CENT
reine Quint	1.5000	701.955 CENT
Klavierquint	1.4983	700.000 CENT
große reine Terz	1.2500	386.314 CENT
große Klavierterz	1.2599	400.000 CENT
absteigende reine Quart	0.7500	–498.045 CENT
syntonisches Komma	1.0125	21.506 CENT

3. Aufgabe

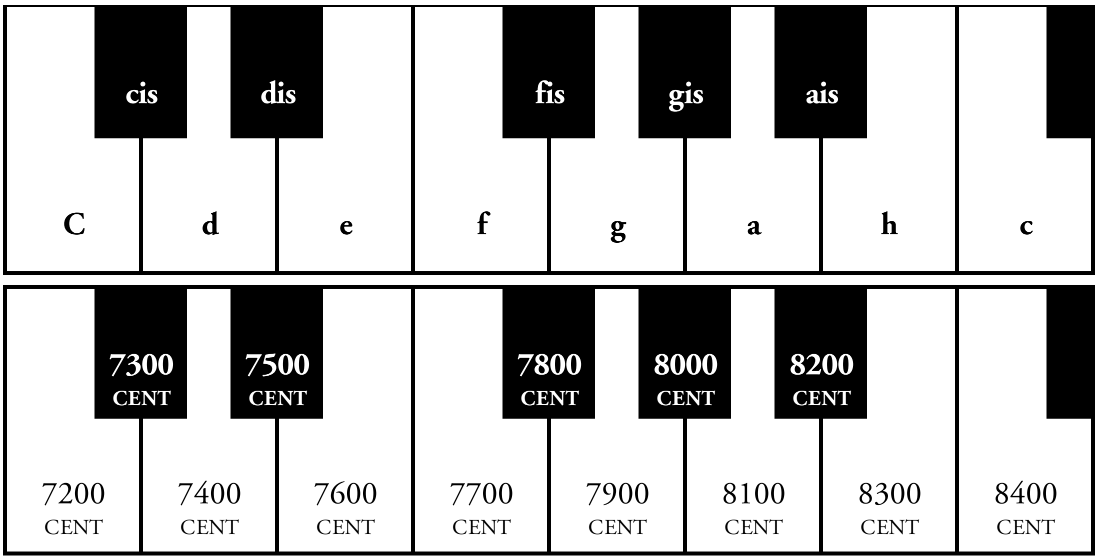
Wenn wir zwei Intervalle x und y multiplizieren, bedeutet das für x_{CENT} und y_{CENT} ein Addieren. Das heißt:

$$(x \cdot y)_{CENT} = x_{CENT} + y_{CENT}$$
$$(x^r)_{CENT} = r \cdot x_{CENT}$$

Versuchen Sie daraus die folgenden Sätze für den Zweierlogarithmus herzuleiten:

$$\mathrm{lb}(x \cdot y) = \mathrm{lb}(x) + \mathrm{lb}(y)$$
$$\mathrm{lb}(x^r) = r \cdot \mathrm{lb}(x)$$

Eine Klavieroktav



Hier wurde – was man eigentlich eher vermeiden sollte – so etwas wie ein «absolutes» CENT-Maß benützt. Einem Hertz entsprechen darin 0 CENT, 2 Hertz entsprechen darin 1200 CENT, 64 Hertz entsprechen darin 7200 CENT.

Wir vergleichen Intervalle auf dem Klavier mit «reinen» Intervallen:

Klavier Intervall	multiplikativ	additiv [CENT]	additiv [CENT]	multiplikativ	reines Intervall
Prim	1	0	0	1	Prim
Halbton	1.0595	100	~112	16/15	Halbton
Ganzton	1.1225	200	~204	9/8	Ganzton
kleine Terz	1.1892	300	~316	6/5	kleine Terz
große Terz	1.2599	400	~386	5/4	große Terz
Quart	1.3348	500	~498	4/3	Quart
Tritonus	1.4142	600			
Quint	1.4983	700	~702	3/2	Quint
kleine Sext	1.5874	800	~814	8/5	kleine Sext
große Sext	1.6818	900	~884	5/3	große Sext
kleine Septim	1.7818	1000	~996	16/9	kleine Septim
große Septim	1.8877	1100	~1088	15/8	große Septim
Oktav	2	1200	1200	2	Oktav

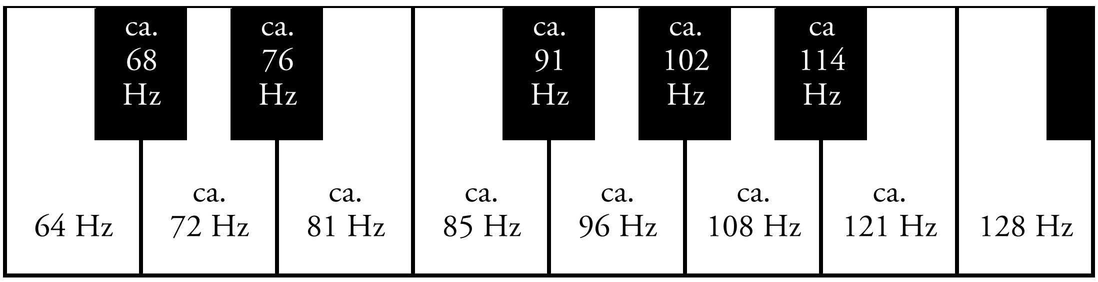
↑

Die Zahlen in **dieser** Spalte können mit Hilfe der Formel bestimmt werden, aber auch mit der Überlegung, dass für den Halbton ζ im multiplikativen Sinn gelten muss:

$$\zeta \cdot \zeta \cdot \zeta \cdot \zeta \cdot \zeta \cdot \zeta \cdot \zeta \cdot \zeta \cdot \zeta \cdot \zeta \cdot \zeta \cdot \zeta = \zeta^{12} = 2$$

oder: $\zeta = \sqrt[12]{2}$ 1.0595

So gesehen sind dann alle Klavierintervalle Potenzen von ζ.
Zum Beispiel: Tritonus $= \zeta^6 = \sqrt{2}$.



Äquivalenz von Intervallen

Zwei Intervalle x und y bezeichnen wir als äquivalent (kurz: x **æ** y), wenn sie sich exakt um eine oder mehrere Oktaven unterscheiden.

Das heißt **im multiplikativen Sinn**:

x æ y genau dann, wenn **x : y eine Zweierpotenz**

Das heißt **im additiven Sinn**:

x æ y genau dann, wenn $x_{CENT} - y_{CENT}$ **ein Vielfaches von 1200**

Beispiele:	Prim	æ	Oktav	
	1	æ	2	
	aufsteigende reine Quint	æ	absteigende reine Quart	
	$\frac{3}{2}$	æ	$\frac{3}{4}$	
	reine Duodezim	æ	reine Quint	
	3	æ	$\frac{3}{2}$	
	pythagoräischer Ganzton	æ	zwei reine Quinten	
	$\frac{9}{8}$	æ	$\frac{9}{4}$	$= \left(\frac{3}{2}\right)^2$
	pythagoräische Terz	æ	vier reine Quinten	
	$\frac{81}{64}$	æ	$\frac{81}{16}$	$= \left(\frac{3}{2}\right)^4$
	pythagoräisches Komma	æ	zwölf reine Quinten	
	$\frac{531441}{524288}$	æ	$\frac{531441}{4096}$	$= \left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

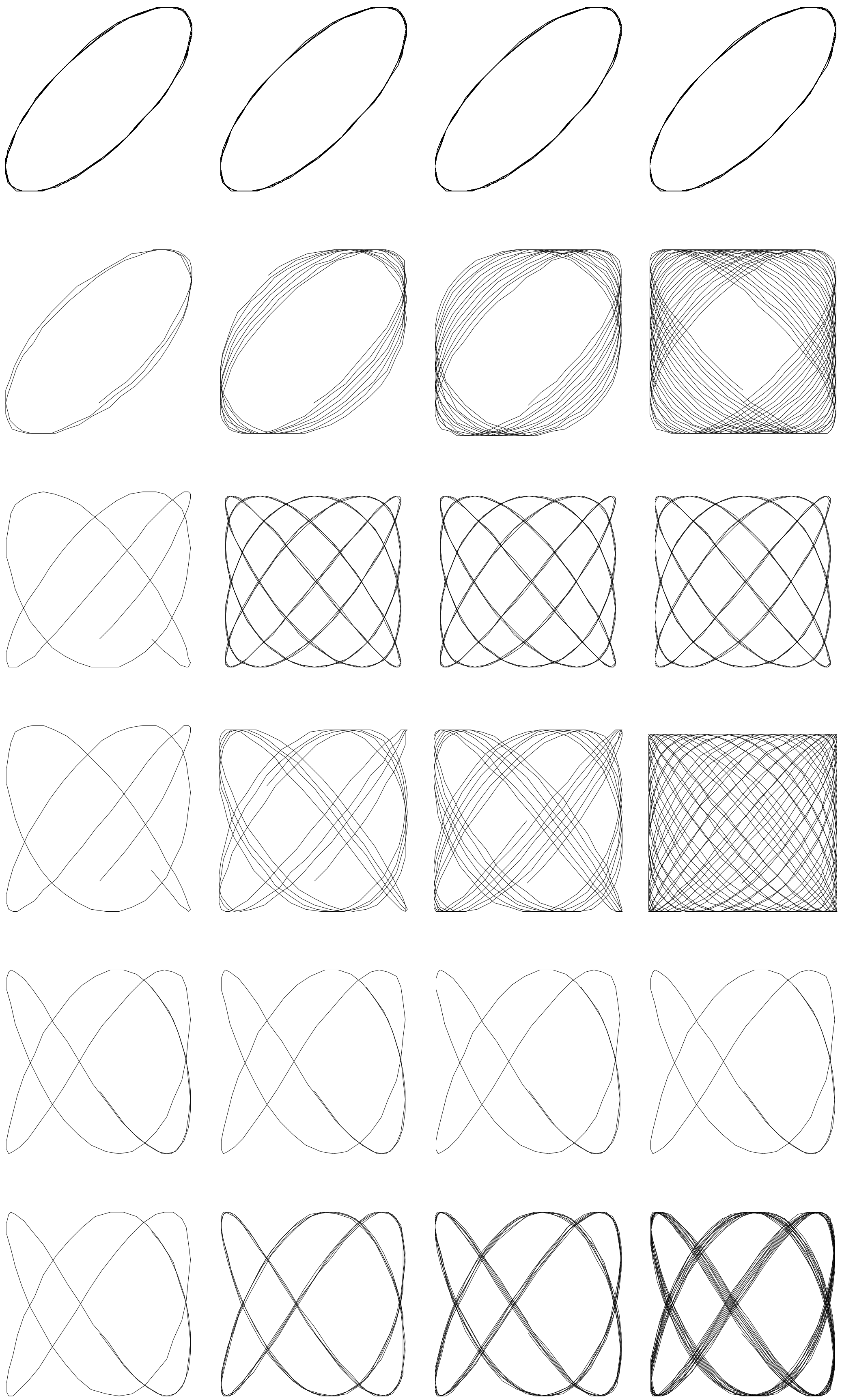
Im multiplikativen Sinn gibt es also zu jedem Intervall mindestens ein äquivalentes Intervall im Bereich [1 , 2] .
Im additiven Sinn gibt es also zu jedem Intervall mindestens ein äquivalentes Intervall im Bereich [0 , 1200] .
Ein Intervall x heißt «**Grundintervall**», wenn 1 x 2 ,
d.h. wenn 0 x_{CENT} 1200 .

Darstellung von Intervallen durch Lissajousformen

Im multiplikativen Sinn sind Intervalle Frequenzverhältnisse **fy : fx**. Intervalle lassen sich deshalb darstellen durch Lissajousformen von dazu passenden Sinustönen

x(t) = Ax·sin(2 ·fx·t) und **y(t) = Ay·sin(2 ·fy·t)** .

Wir wählen **fx** fest 240 Hz und geben zu jedem Intervall vier Bilder entsprechend den Tonspielzeiten von 10.0 ms, 31.3 ms, 50.0 ms und 100.0 ms.
Von oben nach unten sind es die Intervalle: Prim, syntonisches Komma, große reine Terz, große Klavierterz, reine Quint, Klavierquint.



11. Klang, Ton, Frequenzspektrum

Klänge und Töne

Klänge sind Mischungen von Tönen, also letztlich von Sinustönen. Klänge bezeichnen wir als n-Klänge, wenn n unterschiedliche Tonhöhen empfunden werden. 1-Klänge bezeichnen wir **auch** als Töne.

Klang- und Tonfunktion

Der Klang ist eine Mischung von Sinustönen und seine **Klangfunktion** die Summe von Sinustonfunktionen:

$$\mathbf{y(t) = \sum_{i=1} y_i(t) = \sum_{i=1} A_i \cdot \sin(2 \cdot f_i \cdot (t+V_i)) = A \cdot \sum_{i=1} a_i \cdot \sin(2 \cdot f_i \cdot (t+V_i))} \qquad \otimes$$

wobei A_i 0, A 0 , a_i 0, $A_i = A \cdot a_i$ und $\sum_{i=1} a_i = 1$.

Die A_i geben die absoluten, die a_i die relativen Anteile an der Klangstärke.

Einfache Klänge

Bei besonders einfachen Klängen und Tönen gibt es im Hörbereich eine so genannte **Grundfrequenz f**, für welche gilt: $\mathbf{f_i = i \cdot f}$.

Der i-te Teilton oder Partialton – mit der Funktion $A_i \cdot \sin(2 \cdot f_i \cdot (t+V_i))$ – heißt dann «**die i-te Harmonische**» des Klanges.

Etwas traditioneller sind die Bezeichnungen:

«Grundton»	für die	1. Harmonische,	
«1. Oberton»	für die	2. Harmonische,	
«2. Oberton»	für die	3. Harmonische	u.s.w.

Frequenzspektrum

Bei einem Klang mit einer Klangfunktion à la $\otimes$ bezeichnet man:

A als seine Amplitude und die Menge $\{ (f_i \mid a_i) \}$ als sein Frequenzspektrum.

> Anmerkung : Weil die Menge { (fi | ai) } als Funktion a(f) = ∑ai·(f=fi) gedeutet werden kann, wird sie auch als Amplitudenspektrum bezeichnet.

Das folgende Beispiel von Klängen **einer** Saite soll die Sache etwas verständlich machen. Es sind nur die erste bis siebente Harmonische berücksichtigt

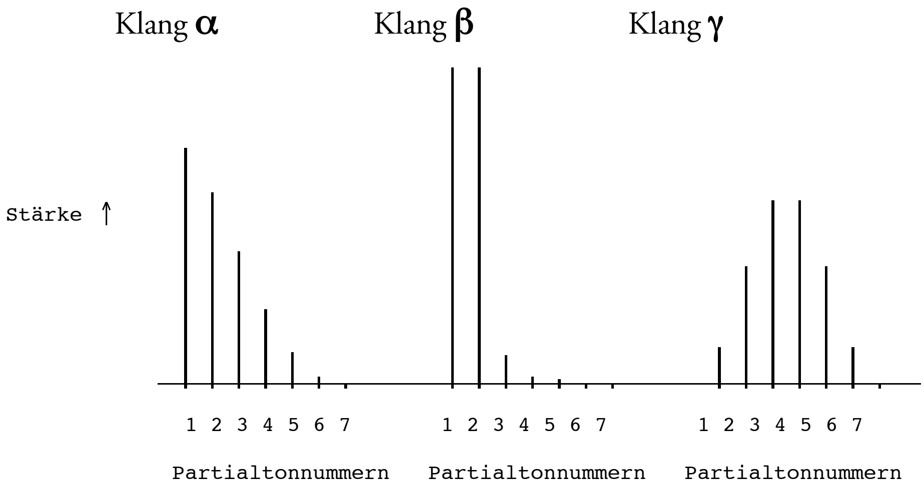
Der Klang α entsteht beim Zupfen der Saite. Der Klang β entsteht beim Anschlagen der Saite mit einem weichen Hammer. Der Klang γ entsteht beim Anschlagen der Saite mit einem harten Hammer.

Nummer der Harmonischen = i =	Frequenz der Harmonischen = i·f =	Klang α	Klang β	Klang γ
		relativer Anteil an der Klangstärke in Promillen = a_i =		
1	f = 300 Hz	351	471	54
2	2f = 600 Hz	285	470	174
3	3f = 900 Hz	197	42	272
4	4f = 1200 Hz	111	11	272
5	5f = 1500 Hz	46	6	174
6	6f = 1800 Hz	10	0	54
7	7f = 2100 Hz	0	0	0

Das Spektrum des Klanges α ist demnach die Tabelle

Nº	1	2	3	4	5	6	7
Frequenz [Hz]	300	600	900	1200	1500	1800	2100
Stärke [%]	351	285	197	111	46	10	0

Die graphischen Darstellungen der Spektren von Klang α , Klang β und Klang γ könnten dann etwa so aussehen:



Merke: Das Frequenzspektrum beschreibt eines der Merkmale von Tönen, welche die Klangfarbe (Timbre) beeinflussen.

Aufgaben

1. Aufgabe

Öffnen Sie im MaMu-Ordner die EXCEL-Arbeitsmappe «SON.xls». Auf dem Arbeitsblatt «HARMONIC» können Sie die Tabelle und die Wellenform einer Klangfunktionen vom Typ

$$\sum_{i=1}^{15} A_i \cdot \sin(2 \cdot i \cdot f \cdot t) \quad .$$

erzeugen. Im Titel des Diagramms stehen dann jeweils die Anteile der 1. bis 15. Harmonischen in der Form

$A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+A_9+A_{10}+A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}+A_{15}$.

Spielen Sie die folgenden Sequenzen durch:

a)	b)
1+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0	1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1
1+0+1+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0	1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+1+1
1+0+1+0+1+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0	1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+1+1+1+1
1+0+1+0+1+0+1+0+0+0+0+0+0+0+0	1+0+1+0+1+0+1+0+1+1+1+1+1+1+1
1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+0+0+0+0+0	1+0+1+0+1+0+1+1+1+1+1+1+1+1+1
1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+0+0+0	1+0+1+0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+0	1+0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1

2. Aufgabe

Spielen Sie eigene Varianten mit «HARMONIC» durch. Wenn Ihnen die Phantasie ausgeht, versuchen Sie es mit:

8+4+2+1+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0
8+7+7+6+6+5+5+4+4+3+3+2+2+1+1
9+0+3+0+2+0+1+0+1+0+0+0+0+0+0

3. Aufgabe

Spielen Sie die folgenden Sequenzen mit «HARMONIC» durch. Versuchen Sie allein aus der Wellenform eine Vermutung darüber abzugeben, welche der Frequenzen

f 2f 3f 4f 5f 6f ... 14f 15f

für die Tonhöhe Ausschlag gebend ist.

a)

1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
0+0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
0+0+0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
0+0+0+0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
0+0+0+0+0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
0+0+0+0+0+0+1+1+1+1+1+1+1+1+1
0+0+0+0+0+0+0+1+1+1+1+1+1+1+1
0+0+0+0+0+0+0+0+1+1+1+1+1+1+1
0+0+0+0+0+0+0+0+0+1+1+1+1+1+1
0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+1+1+1+1+1
0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+1+1+1+1
0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+1+1+1
0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+1+1
0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+1

b)

1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
0+1+0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
0+1+0+1+0+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
0+1+0+1+0+1+0+1+1+1+1+1+1+1+1
0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+1+1+1+1+1
0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+1+1+1
0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+1
0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0

Diese Beispiele zeigen, dass die Frequenz **f** anscheinend für die Tonhöhe bestimmend sein kann, obwohl sie nicht als Summand in der Mischung vertreten ist.

Das ist das Phänomen des fehlenden Grundtones (**MISSING FUNDAMENTAL**). Dazu die folgende Aufgabe.

Posaune

Auf einer Posaune können bei zunehmend gepressterem Ansatz Töne mit den Frequenzen 1f , **2f**, **3f**, **4f**, 5f, 6f, 7f, 8f usw. geblasen werden. Dabei ist f 58.6 Hz. Ein Anfänger schafft die fett gedruckten Frequenzen. Die Töne dieser Folge heißen **Naturtöne** der Posaune.

Wer öfter auf einer Posaune spielt, ist sehr bald vertraut mit seinen Naturtönen und je nach Können mit den «**natürlichen Intervallen**»:

2f : 1f	**OKTAV**
3f : 1f	**DUODEZIM**
3f : 2f	**QUINT**

5f : 2f	**große DEZIM**
4f : 3f	**QUART**
5f : 3f	**große SEXT**
5f : 4f	**große TERZ**
6f : 5f	**kleine TERZ**

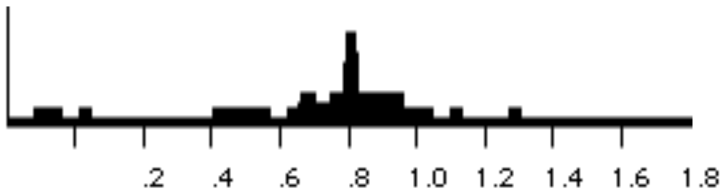
Erste Warnung

Oft wird an diese Stelle gezeigt, wie Dreieck-, Rechteck-, Rampen- und andere Signale durch Mischen von Harmonischen erzeugt werden können. Wenn das gemacht wird, muss man immer daran denken, dass diese Signale nicht auf solche Weise in einem analogen Synthesizer erzeugt werden.

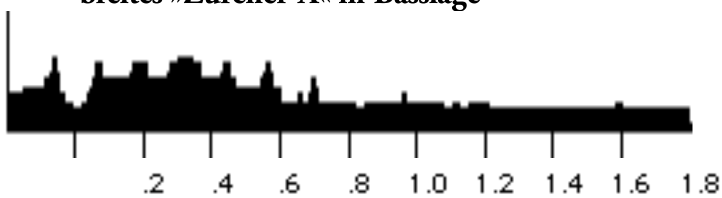
Zweite Warnung

Klänge mit Frequenzspektren in reinem Strichmuster gibt es nur rein theoretisch und in Tonprogrammen schon wegen der Digitalisierung nicht. Beispiele:

1kHz-Sinuston



breites »Zürcher-A« in Basslage



12. Zweiklänge – Wohlklänge

Einfache Töne

Zwei einfache Töne X und Y mit den Grundfrequenzen f und g hätten etwa folgende Frequenzspektren:

```
    |
    |   |
    |   |       |
    |   |       |       |
....|...|...|...|...|...|...|...|...|
0f  1f  2f  3f  4f  5f  6f  7f  8f  9f
```

```
     |
     |
     |         |    |
     |    |    |    |         |
.....|....|....|....|....|....|....|
0g   1g   2g   3g   4g   5g   6g   7g
```

Wir stellen diese «Verteilungen» etwas vereinfacht dar:

```
X: |...|...|...|...|...|...|...|...|...|
   0f  1f  2f  3f  4f  5f  6f  7f  8f  9f

Y: |....|....|....|....|....|....|....|
   0g   1g   2g   3g   4g   5g   6g   7g
```

Wir denken uns f fixiert und g variabel:

f = g

```
X: |...|...|...|...|...|...|...|...|...|
   0f  1f  2f  3f  4f  5f  6f  7f  8f  9f
                                                  1:1
Y: |...|...|...|...|...|...|...|
   0g  1g  2g  3g  4g  5g  6g  7g
```

Jede Harmonische von X kann auch Harmonische von Y sein.
Jede Harmonische von Y kann auch Harmonische von X sein.

2f = g

```
X: |...|...|...|...|...|...|...|...|...|
    0f  1f  2f  3f  4f  5f  6f  7f  8f  9f
                                                2:1
Y: |.......|.......|.......|.......|...
    0g      1g      2g      3g      4g
```

Jede zweite Harmonische von X kann auch Harmonische von Y sein.
Jede Harmonische von Y kann auch Harmonische von X sein.

3f = 2g

```
X: |...|...|...|...|...|...|...|...|...|
    0f  1f  2f  3f  4f  5f  6f  7f  8f  9f
                                                3:2
Y: |.....|.....|.....|.....|.....|.....|...
    0g    1g    2g    3g    4g    5g    6g
```

Jede dritte Harmonische von X kann auch Harmonische von Y sein.
Jede zweite Harmonische von Y kann auch Harmonische von X sein.

5f = 4g

```
X: |...|...|...|...|...|...|...|...|...|
    0f  1f  2f  3f  4f  5f  6f  7f  8f  9f
                                                5:4
Y: |....|....|....|....|....|....|....|....
    0g   1g   2g   3g   4g   5g   6g   7g
```

Jede fünfte Harmonische von X kann auch Harmonische von Y sein.
Jede vierte Harmonische von Y kann auch Harmonische von X sein.

Hypothese

Dieses Zusammenfallen von Harmonischen ist ein Grund für Wohlklang.

Anmerkung: Diese Hypothese scheint nicht ausreichend zu sein , wenn X und Y «obertonfreie» Sinustöne sind. Deshalb wird oft eine zweite Hypothese angehängt, nämlich folgende: Zu jedem Zweiklang erzeugt durch zwei Sinustöne kommen auf dem Wege zum Bewusstsein weitere Sinustöne hinzu. Je nach Schuldigkeit bezeichnet man diese hinzugekommenen Töne als «aural», «neuronal» oder «subjektiv».

Grade des Wohlklangs

Es gibt mehrere Versuche mathematisch Wohlklangsfunktionen einzuführen. Ein hübsches Beispiel ist der ***gradus suavitatis*** von Euler in seinem ***tentamen novæ theoriæ musicæ*** (1739). Es lohnt sich diesen «Lieblichkeitsgrad» etwas genauer zu untersuchen und den Posten «Lieblichkeitsgrad» der Werkstatt entsprechend anzupassen.
In diesem Zusammenhang lohnt sich auch eine Lektüre von Rudolf Willes Artikel «Mathematik und Musiktheorie» (1976).

13. VERSTIMMTE WOHLKLÄNGE

Verstimmte Prim

Zwei einfache Töne X und Y mit Frequenzen f und g mit f g , also in leicht verstimmter Prim zueinander, haben die folgenden vereinfachten Frequenzspektren:

```
     0f......1f......2f......3f......4f......5f......6f
X    |       |       |       |       |       |       |
Y    |       |       |       |       |       |
     0g......1g......2g......3g......4g......5g
```

Weil 1f 1 g, werden 1f und 1g eine Schwebung erzeugen.
Hebt man diese Schwebung auf, so löst man die Verstimmung.

Verstimmte Oktav

Zwei einfache Töne X und Y mit Frequenzen f und g mit 2f g , also in leicht verstimmter Oktav zueinander, haben die folgenden vereinfachten Frequenzspektren:

```
     0f......1f......2f......3f......4f......5f......6f
X    |       |       |       |       |       |       |
Y    |               |               |               |
     0g..............1g..............2g..............3g
```

Weil 2f g, werden 2f und 1g eine Schwebung erzeugen.
Hebt man diese Schwebung auf, so löst man die Verstimmung.

Verstimmte Quint

Zwei einfache Töne X und Y mit Frequenzen f und g mit 3f 2g , also in leicht verstimmter Quint zueinander, haben die folgenden vereinfachten Frequenzspektren:

```
     0f......1f......2f......3f......4f......5f......6f
X    |       |       |       |       |       |       |
Y    |           |           |           |           |
     0g..........1g..........2g..........3g..........4g
```

Weil 3f 2 g, werden 3f und 2g eine Schwebung erzeugen.
Hebt man diese Schwebung auf, so löst man die Verstimmung.

Verstimmte Quart

Zwei einfache Töne X und Y mit Frequenzen f und g mit 4f 3 g , also in leicht verstimmter Quint zueinander, haben die folgenden vereinfachten Frequenzspektren:

```
    0f....1f....2f....3f....4f....5f....6f....7f....8f
X   |     |     |     |     |     |     |     |     |
Y   |       |       |       |       |       |       |
    0g......1g......2g......3g......4g......5g......6g
```

Weil 4f 3 g, werden 4f und 3g eine Schwebung erzeugen.
Hebt man diese Schwebung auf, so löst man die Verstimmung.
Und so weiter ...

Wichtig: Schwebungen nimmt man nur wahr, wenn die schwebenden Frequenzen deutlich im Hörbereich liegen. Liegt das zu stimmende Intervall in hohen Frequenzen, so ist die Schwebung nicht hörbar.

Anwendung: Die Quart-Quint-Regel

Eine wichtige Anwendung der Kenntnisse über die Schwebungsfrequenzen ist die so genannte ***Quart-Quint-Regel***. Damit überprüfen die Klavierstimmer die Reinheit von Oktaven.

Rechne selber nach:

Wenn die
Oktav c - c'
rein ist, haben die
Quart c - f
und die
Quint f - c'
genau die gleiche Schwebungsfrequenz.