KZU • Mathematik • G. Wick

Schwingungen und Töne

Theorie

Erster Teil

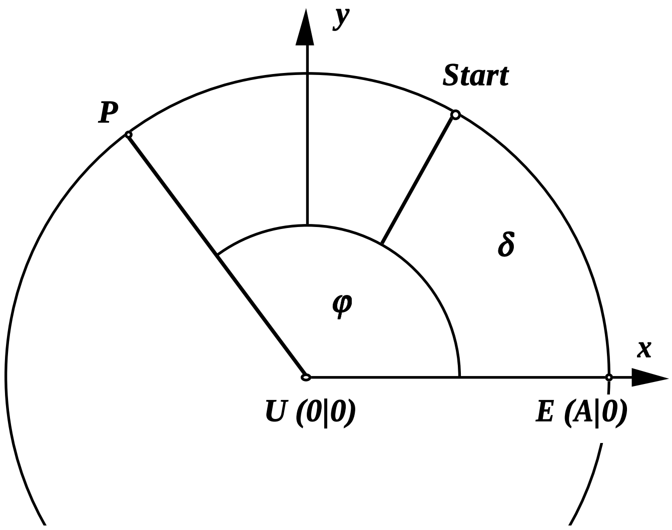
Sommer 2002

Inhaltsverzeichnis

1. KREISBEWEGUNG

Allgemeines

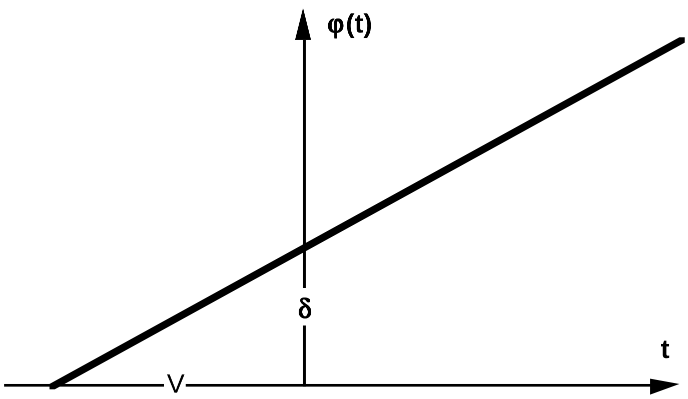
Der Ursprung U eines kartesischen Koordinatensystems ist Mittelpunkt eines Kreises mit Radius A. Den Punkt mit den Koordinaten (A|0) bezeichnen wir mit E. Auf dem Kreis bewegt sich ein Punkt im Gegenuhrzeigersinn. Zu jeder Position P des Punktes gehört ein Winkel φ (Winkel EUP) gemessen im Bogenmaß. Die Zeit t wird in s gemessen. Beim Start ist t = 0.



Der Startwinkel heißt «Winkelverschiebung» und wird mit δ bezeichnet. Wir einigen uns auf : $\varphi \geq 0$ und $0 \leq \delta < 2\pi$. Der Winkel φ ist eine Funktion der Zeit t gemessen in Sekunden. Im einfachsten Fall ist diese Funktion linear : $\boxed{\varphi(t) = \omega \cdot t + \delta}$

Solche Kreisbewegungen bezeichnet man als **gleichförmig**. Der Startwinkel (genannt «Winkelverschiebung») ist $\varphi(0) = \delta$. Der Faktor ω ist konstant und wird als «Winkelgeschwindigkeit» bezeichnet. Irgendwann in der Vergangenheit – zu einem Zeitpunkt, den wir mit (–V) bezeichnen – ist der Winkel φ gleich Null.
D.h. $\varphi(-V) = 0$ oder $\omega \cdot (-V) + \delta = 0$. Und daraus folgt $V = \frac{\delta}{\omega}$.

Die Zeit V heißt «Zeitverschiebung».
Der Graph von φ sieht so aus:



Periode und Frequenz

Wir suchen nun die Antwort auf die Frage: „Wie viele Sekunden braucht der Punkt für eine Runde?" Wir bestimmen also die Zeit T, in welcher der bewegte Punkt eine ganze Umdrehung macht.

Eine Bestimmungsgleichung für T ist zum Beispiel:
$\varphi(T) = \omega \cdot T + \delta = \delta + 2\pi$
Daraus folgt $\omega \cdot T = 2\pi$, und daraus dann

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Die Zeit T heißt «Umlaufzeit» oder «**Periode**». Sie wird gemessen in s.

Die nächste Frage heißt: „Wie viele Runden dreht der Punkt in einer Sekunde?" Gesucht ist damit das Reziproke (der Kehrwert) der Periode, genannt «**Frequenz**» f.
$f = \frac{1}{T}$ bzw. $T = \frac{1}{f}$ bzw. $\omega = 2\pi \cdot f$
Die Frequenz wird gemessen in s^{-1} (= Hertz = Hz).

Gleichungstypen

Aus dem Grundtyp $\varphi(t) = \omega \cdot t + \delta$ können durch passende Ersetzungen weitere fünf Gleichungstypen hergeleitet werden:

$$\varphi(t) = \omega \cdot t + \delta = \frac{2\pi}{T} \cdot t + \delta = 2\pi f \cdot t + \delta$$
$$\varphi(t) = \omega \cdot (t + V) = \frac{2\pi}{T} \cdot (t + V) = 2\pi f \cdot (t + V)$$

1. Aufgabe

Bestimmen Sie aus den vorgegebenen Gleichungen je δ, V, ω, T und f.

a) $\varphi(t) = t$ b) $\varphi(t) = 6\pi \cdot t$ c) $\varphi(t) = \frac{\pi}{12} \cdot t + \frac{3\pi}{4}$

d) $\varphi(t) = 3 \cdot t + \frac{\pi}{6}$ e) $\varphi(t) = 6\pi \cdot (t + 0.1)$ f) $\varphi(t) = \frac{\pi}{120} \cdot (t + 15)$

2. Aufgabe

Die Funktion φ ist gegeben durch die Tabelle:

Zeit t	=	0	1	2	3	4	5	6	7
Winkel φ (t)	=	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{12\pi}{6}$

Bestimmen Sie δ, V, ω, T und f und schreiben Sie die Gleichung von φ in jedem der sechs Typen auf.

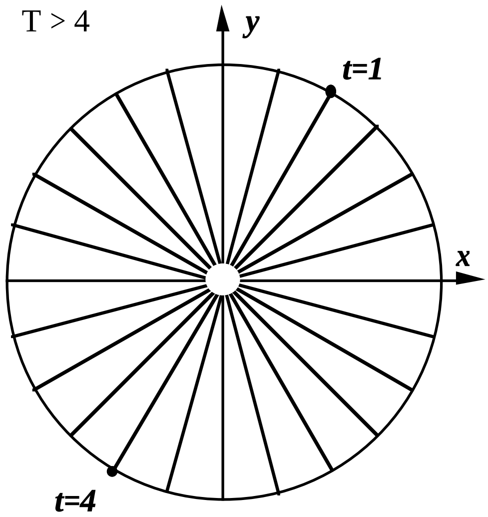
3. Aufgabe

Drei gleichförmige Kreisbewegungen sind dadurch gegeben, dass eine Bedingung für T gegeben ist, und dass bei zwei Positionen die zugehörigen Zeiten eingetragen sind.

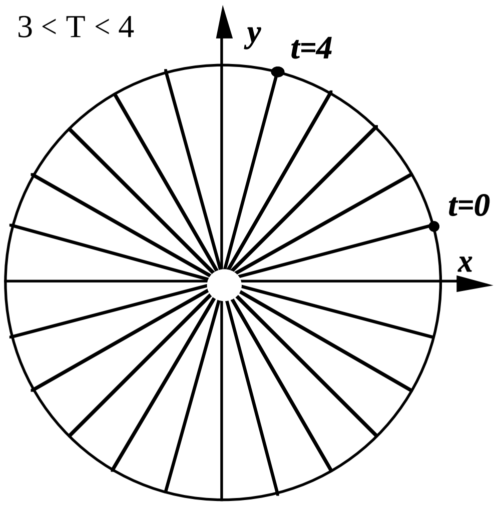
Bestimmen Sie δ, V, ω, T und f.

Beachten Sie, dass $0 \le V < T$.

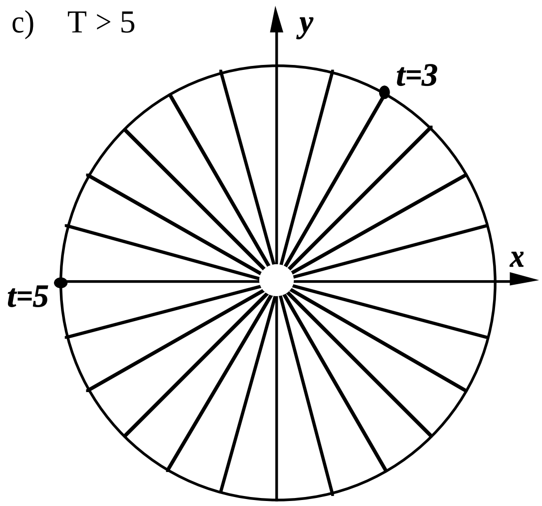
a) $T > 4$



b) $3 < T < 4$



c) $T > 5$

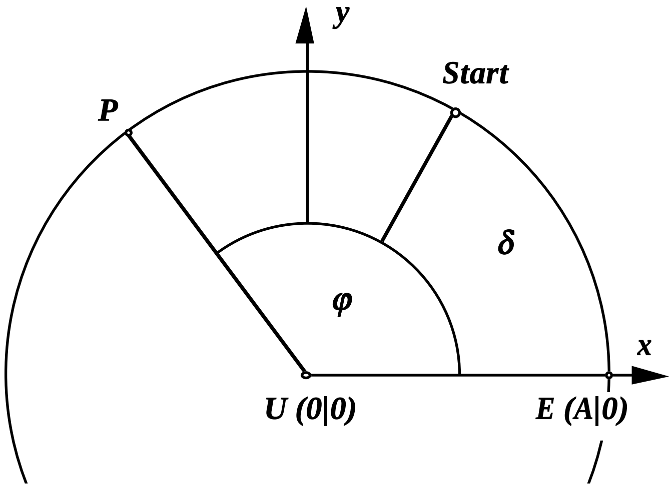


2. SCHWINGUNG

Kartesische Beschreibung der Kreisbewegung

Die Position P des Punktes, der eine Kreisbewegung ausführt, kann auch durch seine kartesischen Koordinaten x und y beschrieben werden.

$$x = A \cdot \cos\varphi$$
$$y = A \cdot \sin\varphi$$

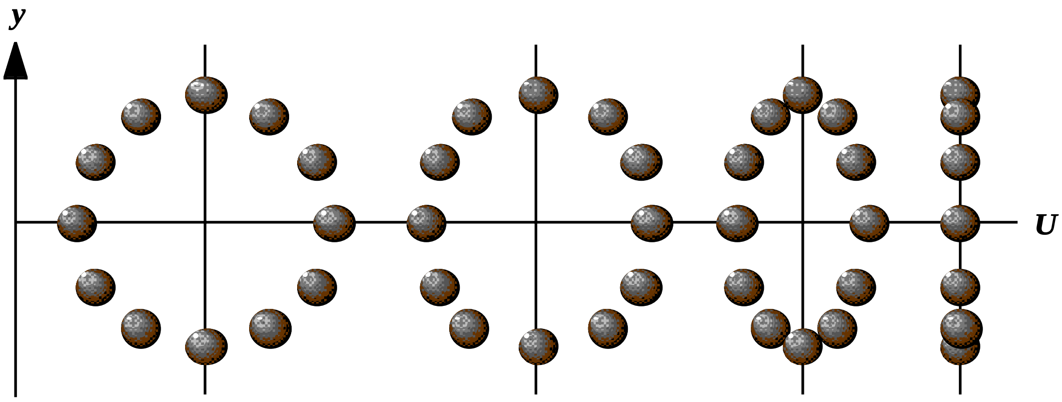


Daraus resultieren dann für y die entsprechenden Gleichungen:

$$y(t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \delta\right) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot (t + V)\right)$$
$$= A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \delta\right) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t + V)\right)$$
$$= A \cdot \sin\left(2\pi f \cdot t + \delta\right) = A \cdot \sin\left(2\pi f \cdot (t + V)\right)$$

Einschränkung des Interesses auf y-Koordinate

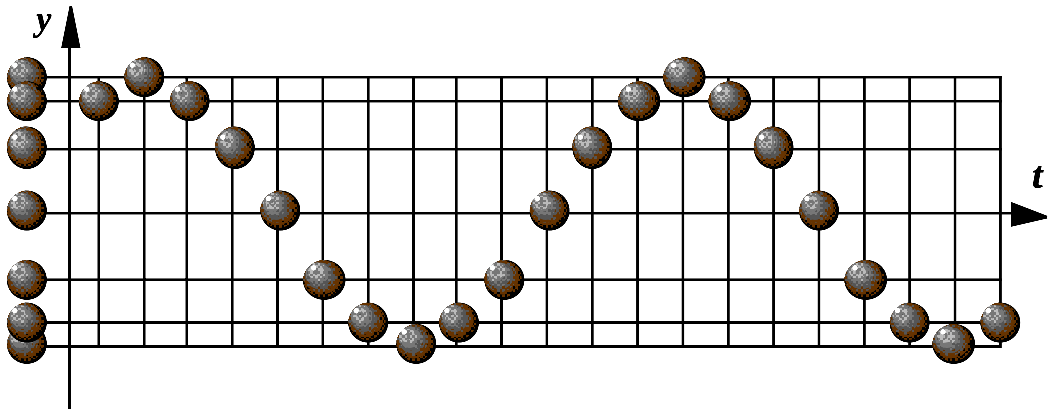
Betrachtet man die oben beschriebene Kreisbewegung aus der Richtung der x-Achse, so schwingt der Punkt um die Mittellage U.



Man spricht von einer harmonischen Schwingung.

Die charakteristische Größe einer harmonischen Schwingung ist die «Elongation» (Auslenkung) y, welche eine Funktion der Zeit t. ist. Der Graph dieser Funktion – in einem t,y-Koordinatensystem – heißt «Wellenform» der Schwingung (bzw. der Funktion y).

Ihre Entstehung soll durch die folgende Skizze diskret – das heißt: nicht kontinuierlich – angedeutet werden.



Die Funktion y hat verschiedene algebraische Darstellungen.

Unter ihnen bezeichnen wir

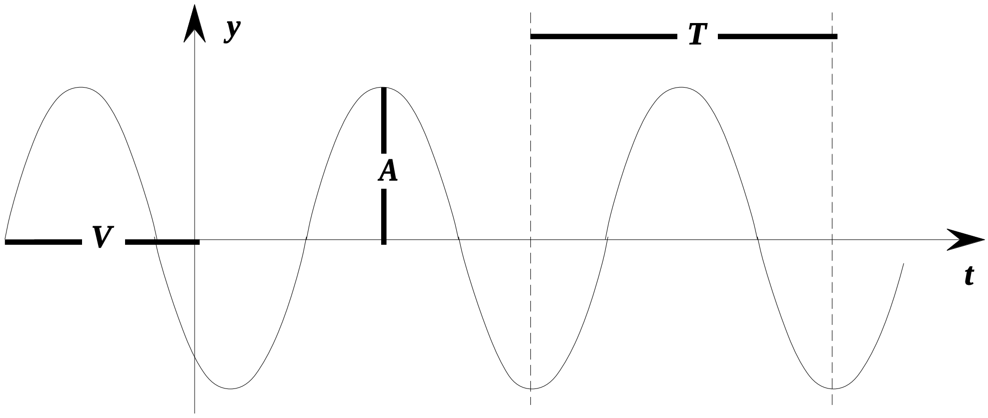
$$\boxed{y(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t+V)\right)}$$

als die «Normalform» der Funktion y.

Die Parameter bekommen Namen:

A heißt «**Amplitude**»,
T heißt «**Periode**» und
V heißt «**Zeitverschiebung**».

Die drei Parameter haben geometrische Entsprechungen in der Wellenform von y:

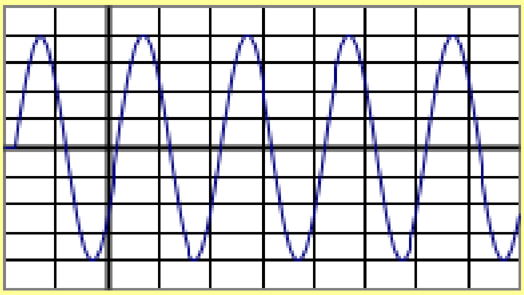


Abmachungen: A, T und V sind positiv.
V ist unseren Abmachungen gemäß kleiner als T.
Und wie bisher ist die Frequenz $f = \frac{1}{T}$.

1. Aufgabe

Öffnen Sie im MaMu-Ordner die EXCEL-Arbeitsmappe «SON.xls». Wählen Sie dort das Arbeitsblatt «ATV». Die Situation ist dann etwa die folgende:

Amplitude A =	4
Periode T =	10
Verschiebung V =	29
besser:	9



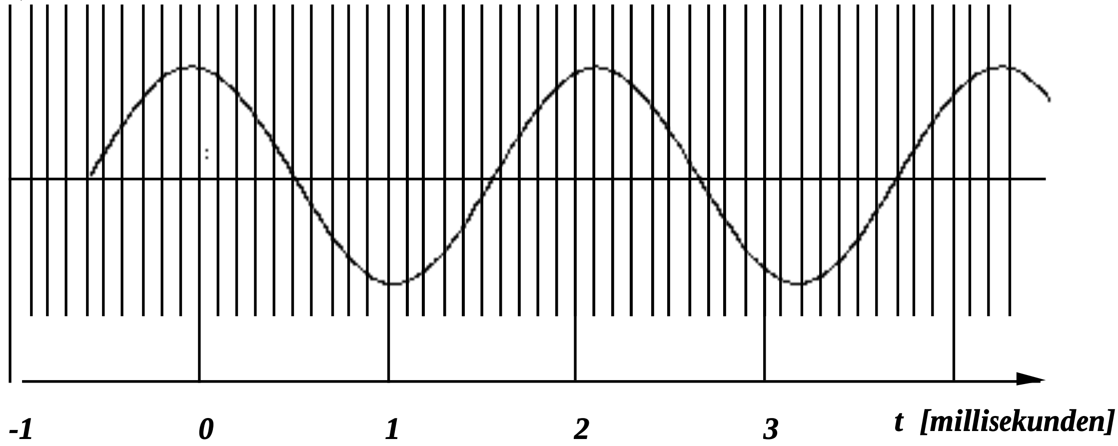
t =	y(t) =
-10.00	0.00
-9.75	0.00
-9.50	0.00
-9.25	0.00
-9.00	0.00
-8.75	0.63
-8.50	1.24
-8.25	1.82
-8.00	2.35
-7.75	2.83
-7.50	3.24
-7.25	3.56
-7.00	3.80
-6.75	3.95

Eine EXCEL-Tabelle mit t-Spalte und y-Spalte ist vorgegeben. In den gekennzeichneten Feldern sind die Werte der Parameter A, T und V enthalten. Verändern Sie die Werte der Parameter und beobachten Sie die dadurch ausgelöste Veränderung der Wellenform im zugehörigen Diagramm.

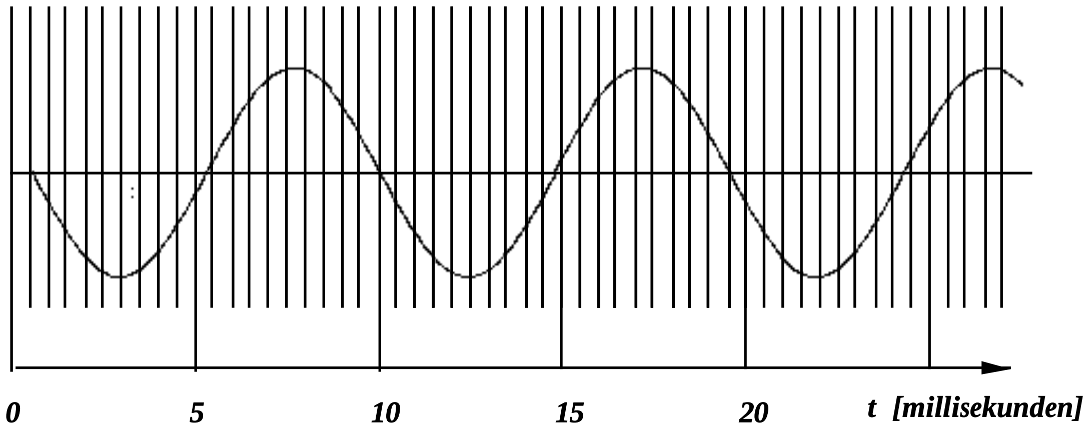
2. Aufgabe

Bestimmen Sie aus der Wellenform einer harmonischen Schwingung möglichst genau die Periode T, die Frequenz f und die Verschiebung V. Dabei sind T und V in Millisekunden, f in Hz anzugeben.

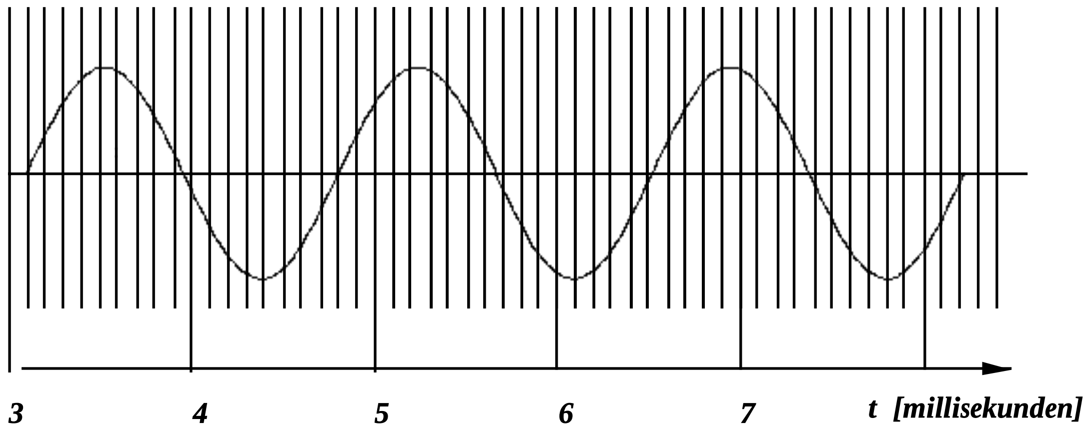
a)



b)



c)



3. SINUSTON

Beschreibt die Größe y einer harmonischen Schwingung eine Luftdruckschwankung, so bezeichnet man diese harmonische Schwingung als «Sinuston». Er liegt im menschlichen Hörbereich, wenn 16 Hz < f < 20’000 Hz.

Anscheinend bestehen die folgenden Verknüpfungen:

der **Amplitude**	entspricht irgendwie	die **Tonstärke**,
der **Frequenz**	entspricht irgendwie	die **Tonhöhe**.

Wir behaupten:

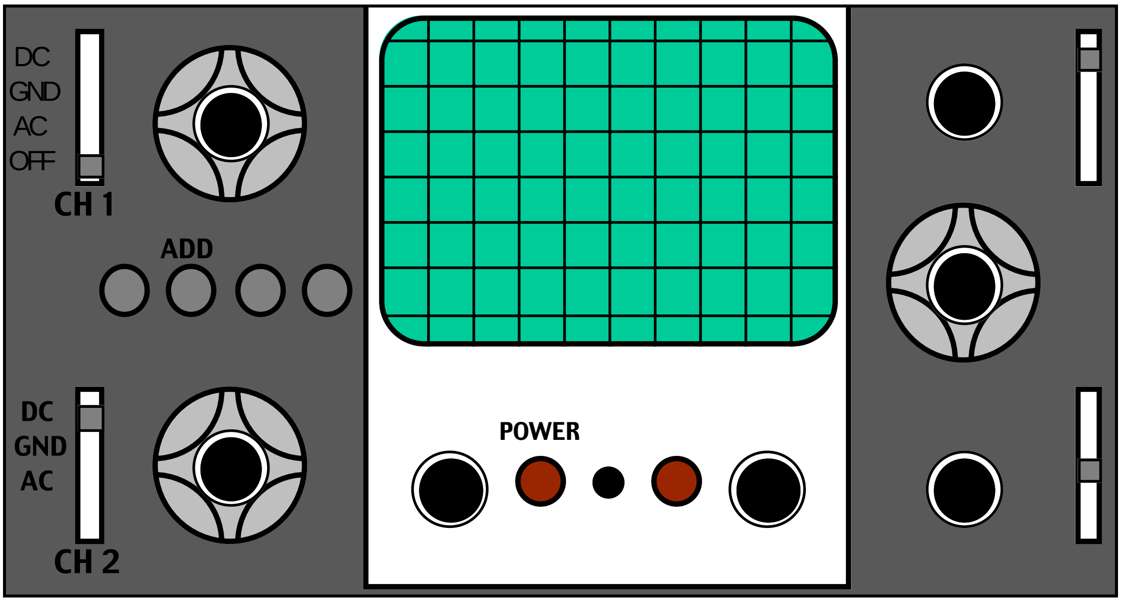
Eine Veränderung der Verschiebung bewirkt keine Veränderung der Hörempfindung.

Wir arbeiten bis auf weiteres unter der Hypothese:
Die Verschiebung ist kein hörbares Tonmerkmal.

4. MISCHEN

Information

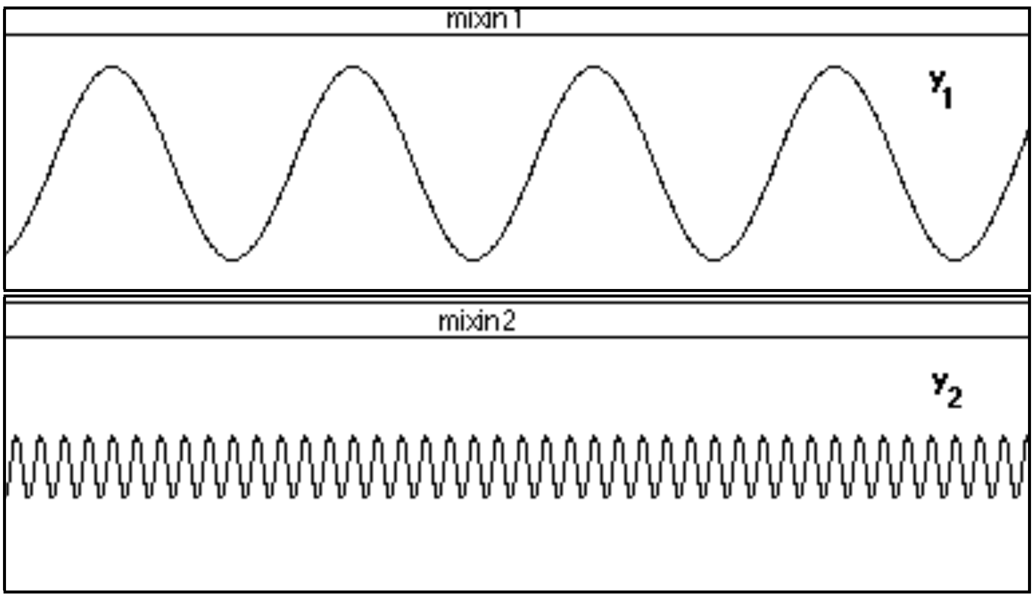
Angenommen ein Oszilloskop empfängt aus einem akustischen Gerät im unteren Kanal CH2 und im oberen Kanal CH1 je einen Sinuston.

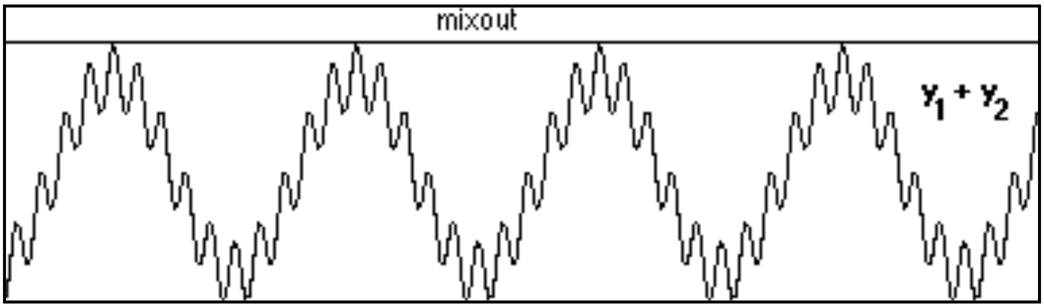


Dann erscheinen im Normalfall die Wellenformen der beiden Signale getrennt auf dem Oszilloskop. Eine Überlagerung im Oszilloskop kann erreicht werden durch Drücken des «ADD»-Knopfes.

Übrigens: Eine Überlagerung kann bei den meisten Stereogeräten durch die Wahl von «MONO» erreicht werden.

Angenommen die Eingaben «mixin1» und «mixin2» sind die Graphen von y_1 und y_2, so ist die Ausgabe «mixout» der Graph von $y_1 + y_2$.





Bezeichnungen

Eine Mischung von Sinustönen ist ein **Klang**. Falls in der Empfindung die Sinustöne verschmelzen, ist der Klang ein **Ton**. Auch reine, ungemischte Sinustöne sind in diesem Sinn Töne. Ist ein Klang die Mischung von zwei Sinustönen, so ist seine «**Klangfunktion**» die Summe der zwei Sinustonfunktionen:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y(t) = A_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} \cdot (t+V_1)\right) + A_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} \cdot (t+V_2)\right).$$

Mischen von zwei Tönen entspricht der Addition von zwei Tonfunktionen.

Anstelle von «Mischen» werden auch die folgenden Begriffe gebraucht: «Zugleichhören», «Überlagern», «Superposition», «Amplitudenmodulation».

Aufgabe

Öffnen Sie im MaMu-Ordner die EXCEL-Arbeitsmappe «SON.xls». Wählen Sie dort das Arbeitsblatt «MIX. Sie können durch Ändern von A1, T1, V1, A2, T2 oder V2 nach Belieben zwei Sinusfunktionen überlagern, entsprechend der oben schon formulierten Formel:

$$y(t) = A1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T1} \cdot (t+V1)\right) + A2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T2} \cdot (t+V2)\right).$$

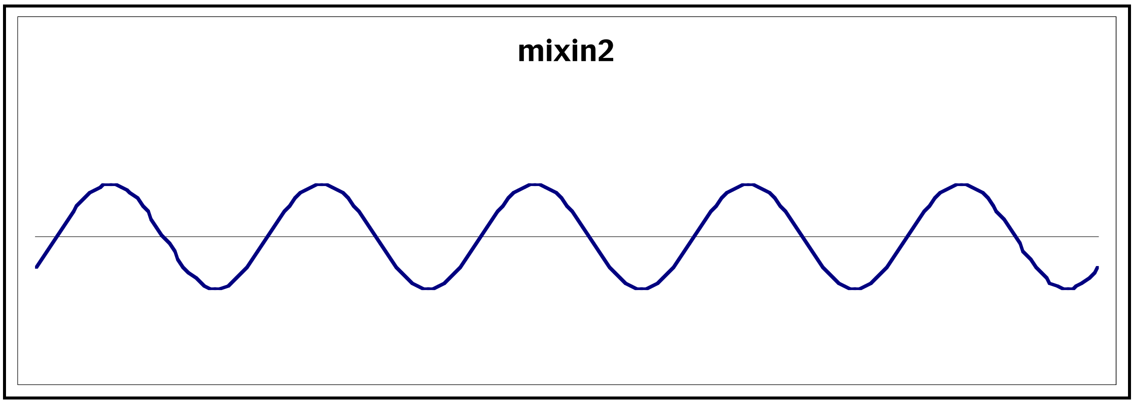
Amplitude A1 =	5
Periode T1 =	4
Verschiebung V1 =	12
besser:	0

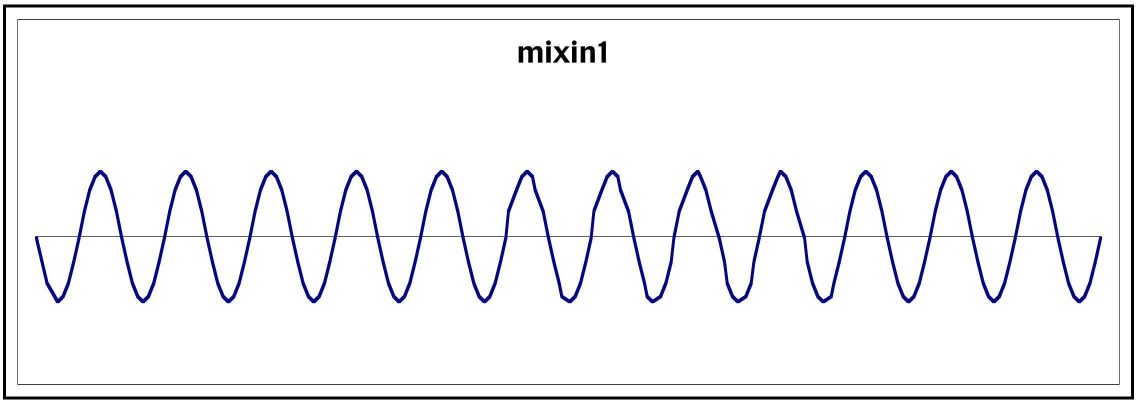
Amplitude A2 =	4
Periode T2 =	10
Verschiebung V2 =	29
besser:	9

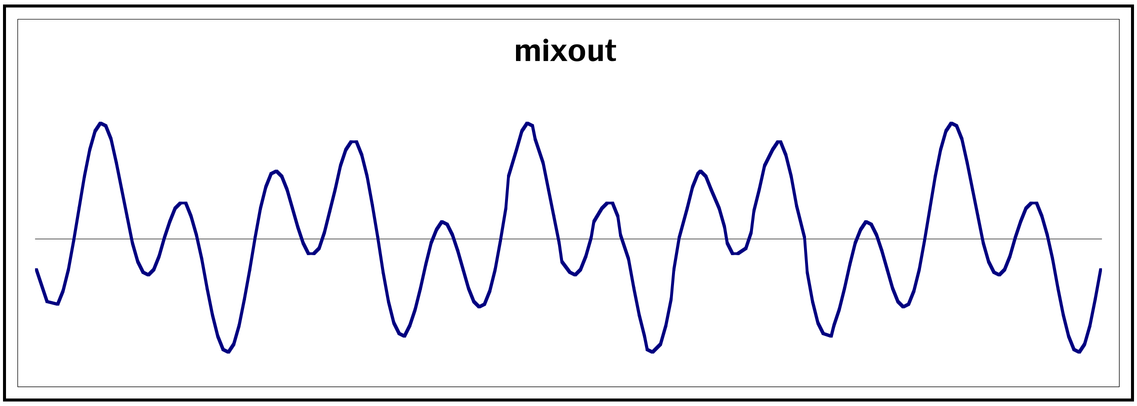
Die Amplitudensumme A1+A2 sollte den Wert 10 nicht übersteigen.

Außerdem wählen wir T1 > 3 und T2 > 3.

Die Diagramme zum abgebildeten Beispiel sehen dann so aus:



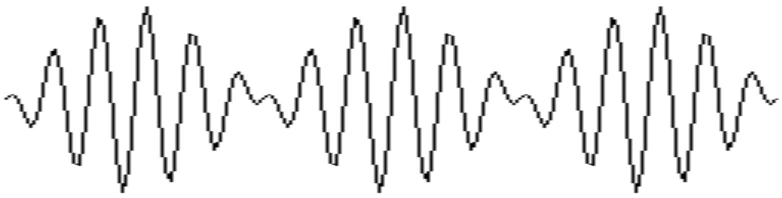




5. SCHWEBUNG

Beobachtung

Wenn zwei Sinustonsignale – eines mit veränderbarer Frequenz – auf zwei getrennten Kanälen in ein Oszilloskop geleitet werden, können durch Drücken des «ADD»-Knopfes die beiden Töne im Oszilloskop überlagert werden. Verändert man die Frequenz des einen Sinustones, so dass die beiden Töne ungefähr die gleiche Tonhöhe haben, wird man die zwei Töne nicht mehr unterscheiden können, wohl aber ein Pulsieren der Tonstärke feststellen. Das Pulsieren wird schneller bzw. langsamer, wenn der Unterschied der beiden Tonhöhen größer bzw. kleiner wird. Die Wellenform der Mischung sieht dann am Oszilloskop etwa so aus:



Bezeichnungen

Eine Mischung von zwei Sinustönen mit kleinem Frequenzunterschied ist ein Ton. Sein Charakteristikum ist ein Pulsieren der Tonstärke. Dieses Pulsieren heißt «**Schwebung**», ein nicht ganz passender Begriff. Besser wäre etwa «Schlagen» wie im Französischen («battement») oder im Englischen («beat»). Die Wellenform dieser Mischung zeigt Bäuche. Die Anzahl Bäuche pro Sekunde heißt «**Schwebungsfrequenz**».

Aufgabe

Öffnen Sie im MaMu-Ordner die EXCEL-Arbeitsmappe «SON.xls». Wählen Sie dort das Arbeitsblatt «SCHWEB». Sie können durch Ändern von A1, f1, A2, oder f2 nach Belieben graphisch Schwebungen erzeugen, entsprechend der Formel:

$$y(t) = A1 \cdot \sin\left(2\pi \cdot f1 \cdot (t+V1)\right) + A2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot f2 \cdot (t+V2)\right)$$

Wählen Sie A1 und A2, so dass $A1+A2 < 10$.

Wählen Sie f1 und f2, so dass

- f1 kleiner ist als f2,
- 30 Hz < f1 < 250 Hz
- 50 Hz < f2 < 250 Hz.

Bei solchen Wahlen kann ein «Aliasing» vermieden werden.

Die Verschiebungen V1 und V2 sind fixiert auf den Wert 0.

Wir denken uns t gemessen in Tausendstelsekunden und f gemessen in Hz.

Die Tondauer ist 1 Sekunde.

Beachten Sie die Form und zähle die Anzahl der Bäuche pro Sekunde. Beginnen Sie vielleicht mit den Einstellungen:

A1 =	5	5	5	5	5	5
f1 =	80	80	80	80	80	80
A2 =	5	2	2	5	5	2
f2 =	84	84	82	82	81	81
Anzahl Bäuche =	4	4	2	2	1	1

Feststellung

Anscheinend errechnet sich die Schwebungsfrequenz aus den Frequenzen f1 und f2 wie folgt: **Schwebungsfrequenz = | f1 – f2 |** .

Herleitung in einem speziell einfachen Fall

- Wir betrachten eine mögliche Tonfunktion y der Schwebung:

$$\begin{aligned} y = y1 + y2 \quad &= 5\cdot\sin(2\pi\cdot 80\cdot t) + 5\cdot\sin(2\pi\cdot 84\cdot t) \\ &= 5 \cdot (\sin(160\pi t)+\sin(168\pi t)) \\ &= 5 \cdot (2\cdot\cos(4\pi t) \cdot \sin(164\pi t)) \\ &= 10\cdot\cos(4\pi t) \cdot \sin(164\pi t) \\ &= 10\cdot\sin(4\pi t+{}^{\pi}/_{2}) \cdot \sin(2\pi\cdot 82\cdot t) \\ &= \underbrace{10\cdot\sin(2\pi\cdot\mathbf{2}\cdot(t+{}^{1}/_{8}))}_{\text{Frequenz sehr klein}} \cdot \underbrace{\sin(2\pi\cdot\mathbf{82}\cdot t)))}_{\text{Frequenz im Hörbereich}} \end{aligned}$$

  Wir haben 2 Wellen pro Sekunde, d.h. 4 Bäuche pro Sekunde.
  In diesem Fall bezeichnet man $10\cdot\sin(2\pi\cdot\mathbf{2}\cdot(t+{}^{1}/_{8}))$ als **modulierte Amplitude** und dieses spezielle Mischen als **Amplitudenmodulation**.

- In diesem speziellen Fall haben y1 und y2 beide die gleiche Amplitude und die gleiche Verschiebung (nämlich 0).

- Für unterschiedliche Amplituden und Verschiebungen wäre die Herleitung wesentlich komplizierter.

6. ALIASING

Feinheit der Darstellung

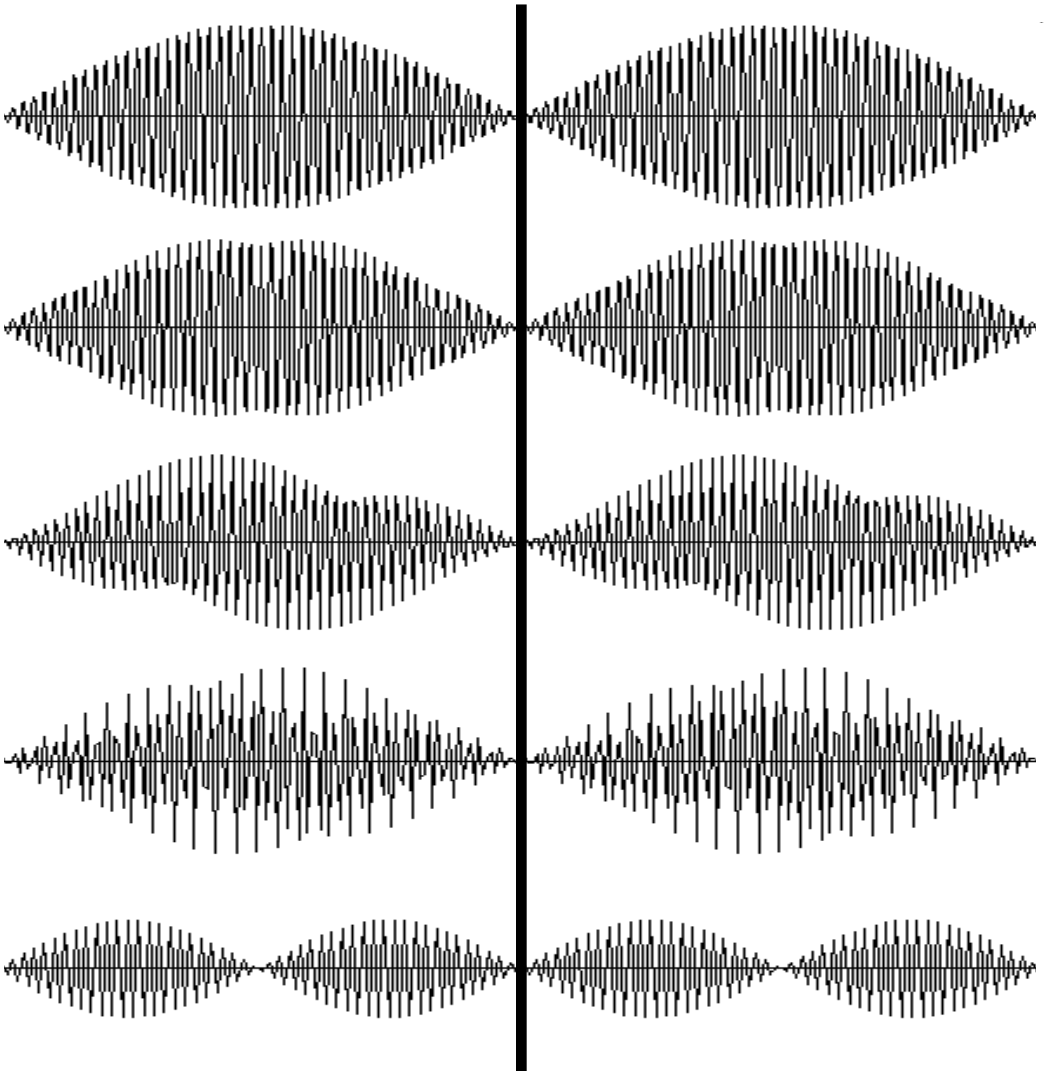
Die folgenden Bilder sollten alle die Wellenform der Mischung

$$y(t) = 5 \cdot \sin(2\pi \cdot 100 \cdot t) + 5 \cdot \sin(2\pi \cdot 102 \cdot t)$$

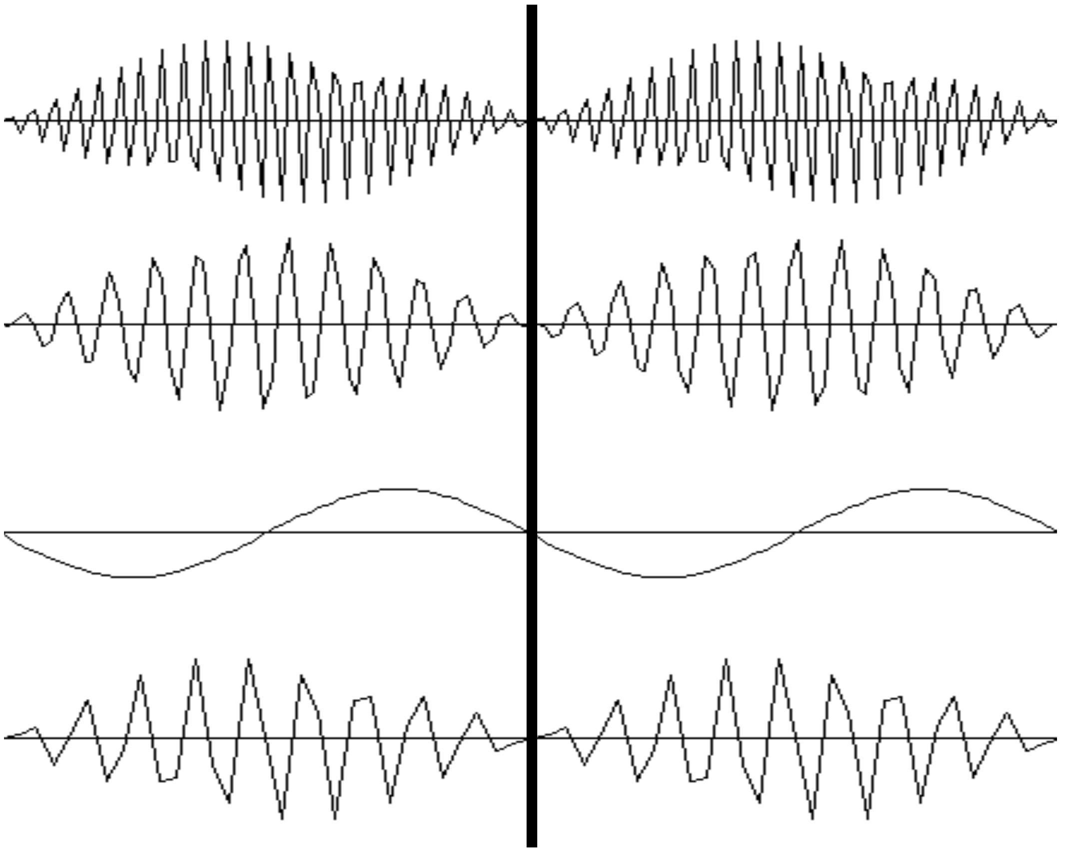
darstellen.

Die gemischten Sinustöne haben Frequenzen von 100 Hz und 102 Hz. Die dargestellte Zeit ist eine Sekunde. Errechnet man N Stützstellen (Stichproben, Samples) pro Sekunde, so spricht man von einer Stützrate (Sampling Rate) von N Hz.

Zu den Bildern auf dieser Seite gehören (von oben nach unten) Stützraten von 1000, 600, 300, 250, 200 Hz.



Zu den Bildern auf dieser Seite gehören (von oben nach unten) Stützraten von 150, 125, 100, 60 Hz.



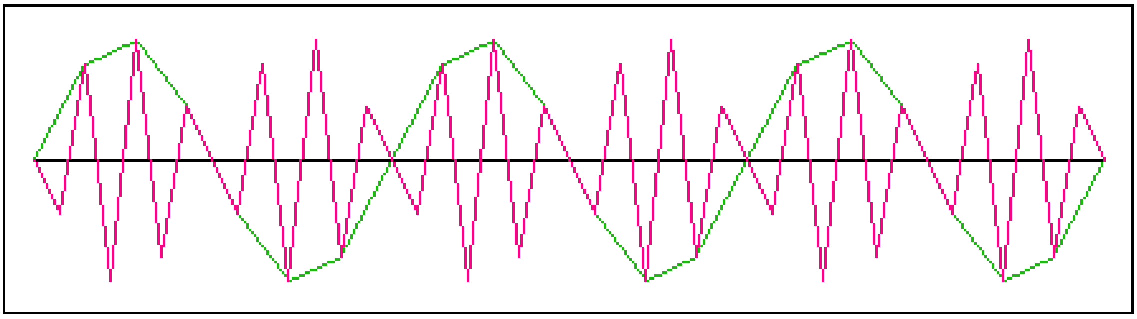
Folgerung

Der Wellenformcharakter bleibt einigermaßen erhalten, wenn nur Frequenzen vorkommen, die kleiner als die Hälfte der Stützrate sind. Damit dies gewährleistet ist werden so genannte Anti-Aliasing-Filter vorgeschaltet.

Beispiel CompactDisc: Die Stützrate ist 44.100 kHz. Bei der Aufnahme eliminiert ein Anti-Aliasing-Filter Frequenzen ab etwa 20 kHz.

«Aliasing» ist Fehlinterpretation, die durch zu wenig dichte Information verursacht ist. Am Computer besteht Aliasing-Gefahr bei Diagrammen in Tabellenkalkulationen wie zum Beispiel EXCEL (wegen der Berechnungsdichte), bei Tondokumenten in Audioprogrammen (wegen der Aufnahmedichte) und bei graphischen Darstellungen am Bildschirm (wegen der Dichte der Bildschirmpunkte).

Die folgende Graphik zeigt die Auswirkung (in grün), wenn nur jeder zweite Messwert der roten Messreihe berücksichtigt wird.



Aufgabe

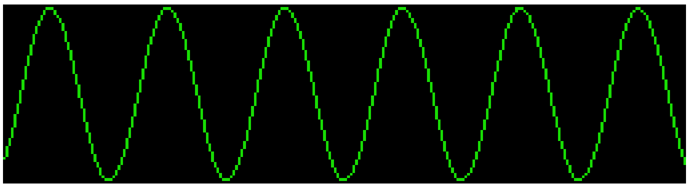
Machen Sie in EXCEL einige Aliasing-Experimente mit Tabellen und Graphen zu hochfrequenten Sinusfunktionen.

7. SYNTHESIZER-BAUSTEINE

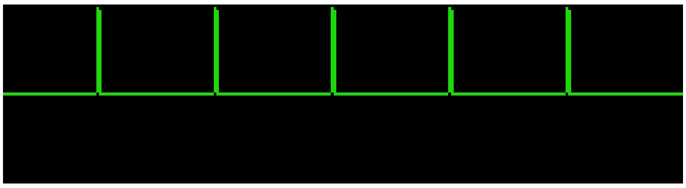
Oszillatoren

erzeugen zum Beispiel die folgenden Signalformen:

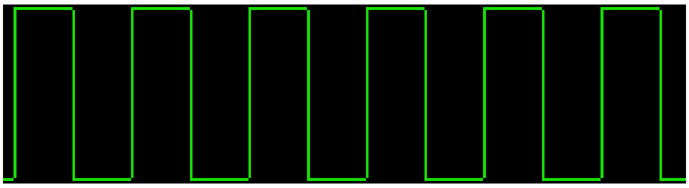
SINUSSIGNAL (SINE)



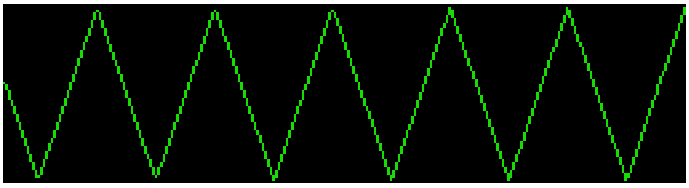
IMPULSSIGNAL (PULSE)



RECHTECKSIGNAL (SQUARE)

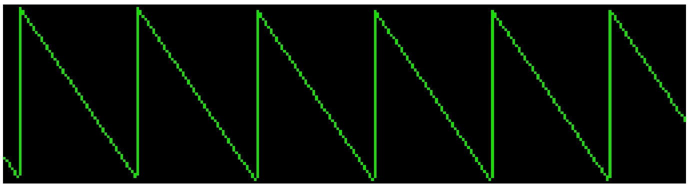


DREIECKSIGNAL (TRIANGLE)



RAMPENSIGNAL (RAMP)

eine Variante davon: Sägezahnsignal (sawtooth)



Die Signale in einem Synthesizer werden unterschieden

• nach Frequenzen in:
1) Signale im Hörbereich (Typ AUDIO)
2) Signale unterhalb des Hörbereiches (Typ LF, wie LOW FREQUENCY)

• nach ihrer Funktion in:
a) Typ CONTROLLED
b) Typ CONTROL (sie steuern z. B. Modulationen)

Operatoren auf allen Signalformen

y1 und y2 beschreiben zum Beispiel Sinussignale

$y1(t) = A1 \cdot \sin(2\pi \cdot f1 \cdot t)$, $y2(t) = A2 \cdot \sin(2\pi \cdot f2 \cdot t)$

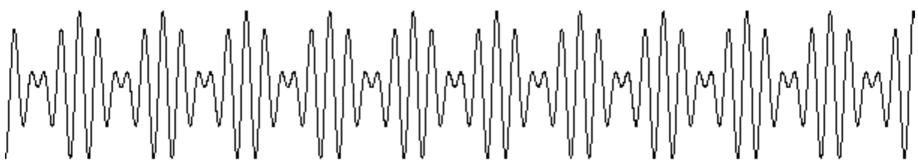
Die Verallgemeinerung auf beliebige Signale ist inhaltlich einfach.

y1 →
y2 → **MIXER** → **y**

$y(t) = y1(t) + y2(t)$

Beispiel AUDIO / LF:

Beispiel AUDIO / AUDIO:



y1 →
y2 → **FREQUENZMODULATOR** → **y**

$y(t) = A1 \cdot \sin(2\pi \cdot (f1+y2(t)) \cdot t) = A1 \cdot \sin(2\pi \cdot (f1+A2 \cdot \sin(2\pi \cdot f2 \cdot t)) \cdot t)$

$(f1+A2 \cdot \sin(2\pi \cdot f2 \cdot t))$ bedeutet dabei eine modulierte Frequenz.

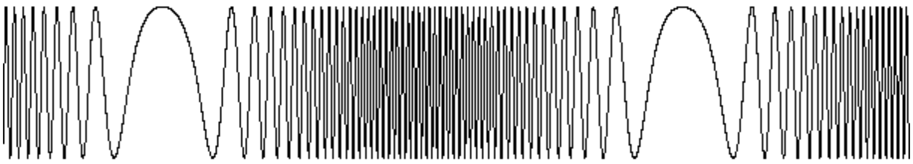
f1 ist die Trägerfrequenz (carrier frequency),

f2 ist die Modulationsfrequenz (modulation frequency) und

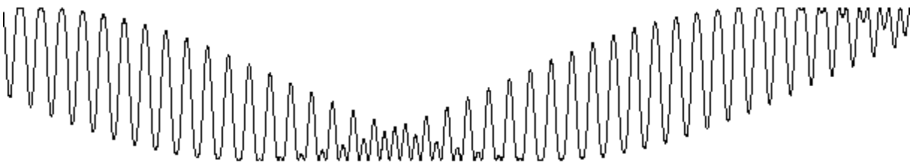
A2 ist die Frequenzabweichung (deviation frequency).

Beim Synthesizer läuft das so:
Ein Oszillator erzeugt y1 (vom Typ CONTROLLED).
Ein anderer Oszillator erzeugt y2 (vom Typ CONTROL) und kontrolliert die Frequenzmodulation (FM CONTROL).
Die Gesamteinheit heißt VOLTAGE CONTROLLED OSCILLATOR kurz: VCO.

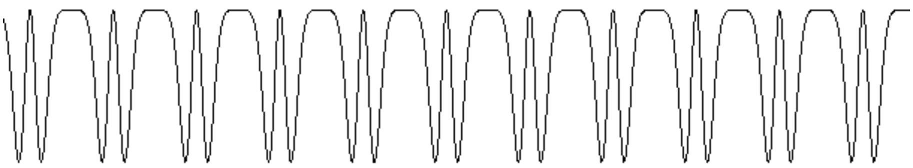
Beispiel AUDIO / LF:



Beispiel LF / AUDIO:



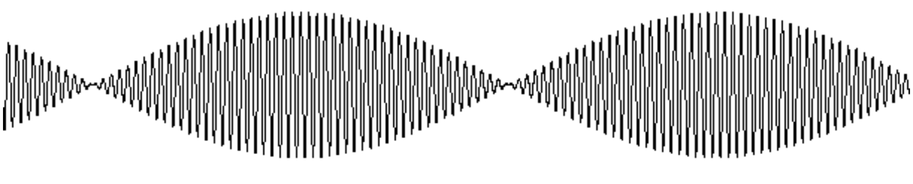
Beispiel AUDIO / AUDIO:



y1 →
y2 → $\boxed{\textbf{RINGMODULATOR}}$ → **y**

$y(t) = y1(t) \cdot y2(t)$

Beispiel AUDIO / LF:

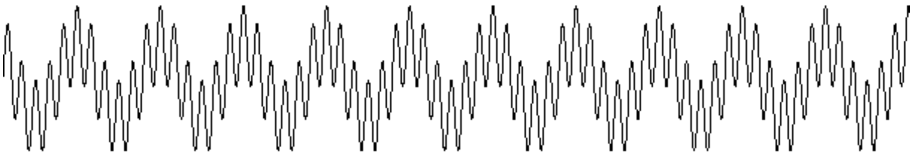


In diesem Fall spricht man eher von Amplitudenmodulation, weil

$$y(t) = A1 \cdot y2(t) \cdot \sin(2\pi \cdot f1 \cdot t) = A1 \cdot A2 \cdot \sin(2\pi \cdot f2 \cdot t) \cdot \sin(2\pi \cdot f1 \cdot t)$$

$A1 \cdot A2 \cdot \sin(2\pi \cdot f2 \cdot t)$ bedeutet dabei eine modulierte Amplitude.
Amplitudenmodulation findet auch statt beim Mixen von zwei Sinustönen mit gleicher Amplitude und kleinem Frequenzunterschied (siehe 5. Schwebung).

Beispiel AUDIO / AUDIO:



Operator mit Impulssignal in der Rolle CONTROLLED

y1 →
y2 → **PULS-WEITE-MODULATOR** → **y**

y1 ist in diesem Fall ein Impulssignal mit Periode T1 und voreingestellter Pulsweite w.

y2 ist z. B. ein Sägezahnsignal mit Periode T2 und $0 < A2 \leq 1$:

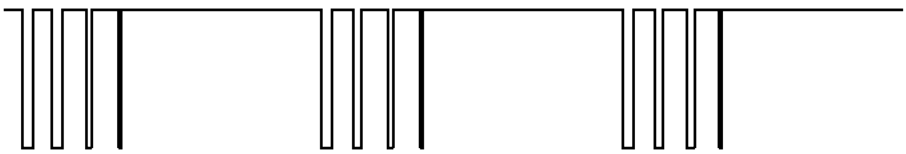
$y2(t) = A2 \cdot ({}^{t}/_{T2} \text{ modulo } 1)$.

Die Pulsweite von y1 wird dann wie folgt moduliert:

$$w(t) = w + y2(t) \cdot T1 ,$$

wobei eine Übersteuerung stattfindet, wenn $w(t) > T1$.

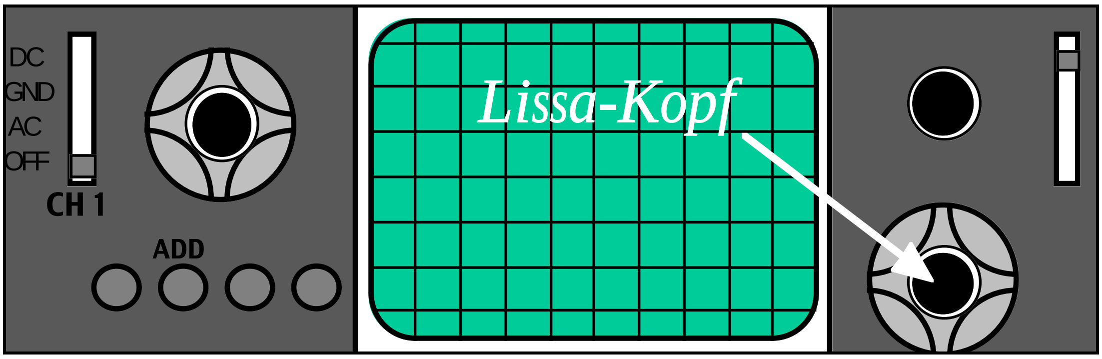
Beispiel AUDIO / AUDIO:



w übersteuert

8. VERGLEICHEN

Beobachtung

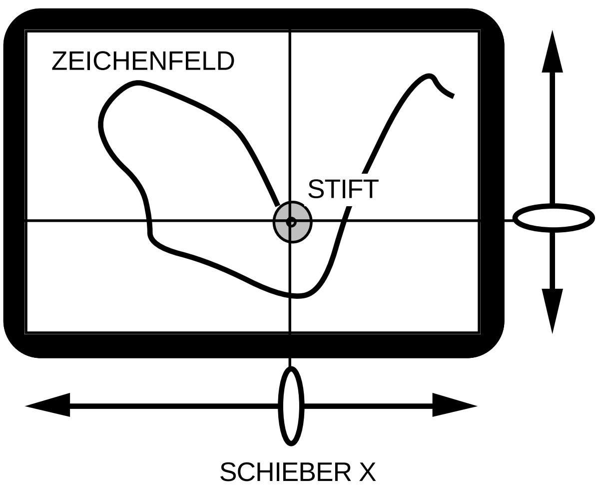


Angenommen es laufen zwei Sinustonsignale auf zwei Kanälen in ein Oszilloskop, so erscheinen beide Wellenformen. Der Sinuston auf CH2 heißt auch y, der auf CH1 heißt auch x. Man bringt nun die Achsen der beiden Wellenformen durch Drehen des «LISSA-Kopfes» zur Deckung. Zieht man jetzt den «Lissa»-Kopf heraus, erscheint ein neues Bild, die so genannte «**Lissajousform**» von x und y.

Wenn $x(t) = A1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T1} \cdot (t+V1)\right)$ und $y(t) = A2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T2} \cdot (t+V2)\right)$,

misst die Breite der Lissajousform $2 \cdot A1$, und misst ihre Höhe $2 \cdot A2$.

Zum Entstehen einer Lissajousform



Man denke sich ein rechteckiges Zeichenfeld auf dem ein Stift aufliegt. Der Stift kann horizontal durch den Schieber X und gleichzeitig vertikal durch den Schieber Y bewegt werden. Vielleicht erinnert dich das an das Kinderspiel «MAGIC SCREEN».

Ein kartesisches Koordinatensystem mit horizontaler x-Achse und vertikaler y-Achse hat seinen Ursprung in der Mitte des Zeichenfeldes. Die Bewegungen der Schieber X und Y können beschrieben werden durch Funktionen x und y. Die Position P des Stiftes zur Zeit t ist gegeben durch das Paar x(t) und y(t).

Uns interessieren vor allem Lissajousformen zu zwei Sinustönen.

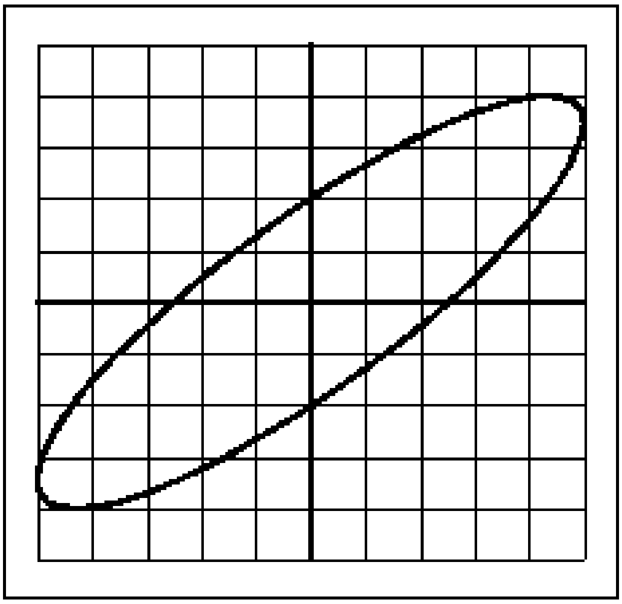
$$x(t) = A1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T1} \cdot (t+V1)\right) \qquad y(t) = A2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T2} \cdot (t+V2)\right)$$

Aufgaben und Folgerungen

Öffnen Sie im MaMu-Ordner die EXCEL-Arbeitsmappe «SON.xls».
Wählen Sie dort das Arbeitsblatt «LISSA».
Beginnen Sie mit der untenstehenden Einstellung.
Zeit und Zeitverschiebung werden hier in µs,
die Frequenz in Hz gemessen.

horizontal	
Amplitude A1 =	5
Frequent f1 [Hz] =	240
Verschiebung V1 [µs] =	350
vertikal	
Amplitude A2 =	4
Frequent f2 [Hz] =	240
Verschiebung V2 [µs] =	0

1. Aufgabe



Verändern Sie V2 zu 350, 700, 1050 … 3500. Beachte die Form der Kurve. Wie oft berührt die Kurve den rechten Rand (Anzahl = Nx), wie oft den unteren Rand (Anzahl = Ny)?

1. Folgerung

Die Kurve hat die Form einer Ellipse.

Nx = Ny = 1.

2. Aufgabe

Beginnen Sie mit der gleichen Einstellung wie bei Teilaufgabe A.

Verändern Sie f2 zu 120, 240, 480, 720, 960. Beachten Sie die Form der Kurve.

Wie groß sind je Nx und Ny?

2. Folgerung

Die Kurve hat der Reihe nach die Formen:

Nx =	2	1	1	1	1
Ny =	1	1	2	3	4

3. Aufgabe

5	Beginnen Sie so.
360	Verändern Sie f2 zu 540, 480,
0	432 und 420.
4	Beachten Sie die Form der
720	Kurve.
0	Wie groß sind je Nx und Ny?

Lösung

f2 =	720	540	480	450	432	420
Nx =	1	2	3	4	5	6
Ny =	2	3	4	5	6	7

4. Aufgabe

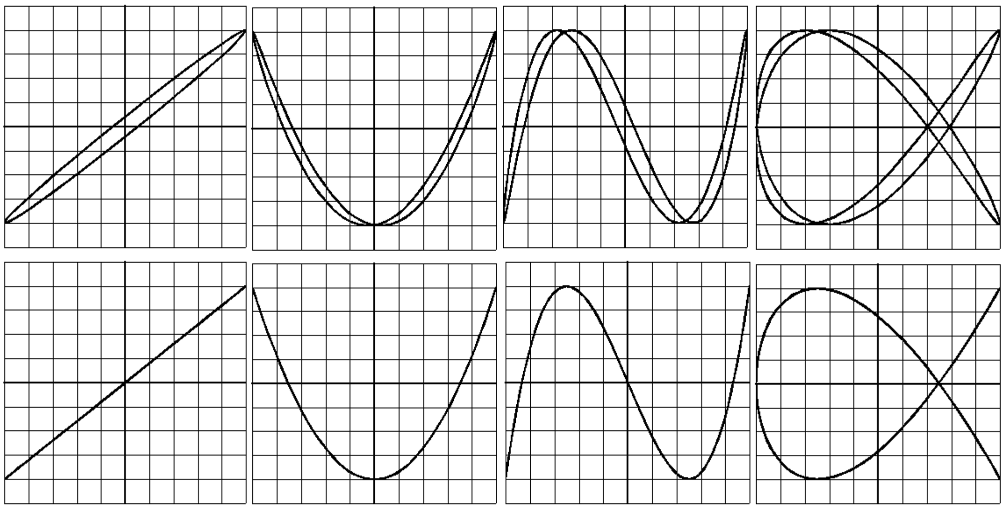
5	Beginnen Sie so.
100	Verändern Sie (f1|f2) zu (120|180), (200|300), (240|360), (300|450) (360|540).
0	Beachten Sie die Form der Kurve.
4	**Lösung**
150	Die Form, Nx und Ny ändern sich nicht. Eventuell verändert sich die Kurven-
0	dicke wegen der unterschiedlichen Anzahlen und Positionen der Stützpunkte.

Schlussfolgerung

Die Anzahlen der Berührungen geben Aufschluss über das Verhältnis der Frequenzen.

Genauer: Nx und Ny sind Zähler und Nenner des gekürzten Bruches $\frac{f1}{f2}$.

Bei «doppelt durchlaufenen» Kurven muss diese Faustregel etwas modifiziert werden.



«Doppelt durchlaufene» Kurven berühren eine oder mehrere Ecken des Rechtecks $-A1 \le x \le A1$ und $-A2 \le y \le A2$.

In diesem Fall muss man a) Eckberührungen bei Nx und Ny mitzählen,
b) Nichteckberührungen doppelt zählen.

Zeit- und Winkeldifferenzen

Bei Schwingungen gleicher Frequenz lassen sich mit Hilfe der Lissajousform

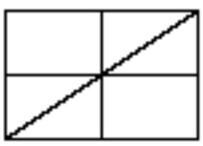
- der Unterschied der Zeitverschiebungen (Zeitdifferenz ΔV)
- der Unterschied der Winkelverschiebungen (Winkeldifferenz $\Delta\delta$)

leicht abschätzen.

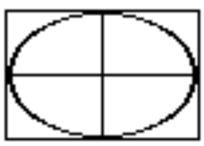
$$x(t) = A_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t+V_1)\right) \qquad x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t+\delta_1)$$

$$y(t) = A_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t+V_2)\right) \qquad y(t) = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t+\delta_2)$$

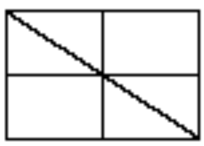
$$\Delta V = |V_1 - V_2| \qquad \Delta\delta = |\delta_1 - \delta_2|$$



$\Delta V = 0$
$\Delta\delta = 0$
«in Phase»



$\Delta V = T/4$
$\Delta\delta = \pi/2$



$\Delta V = T/2$
$\Delta\delta = \pi$

9. Lösungen der Aufgaben

1. Aufgabe (Seite 4)

a)	$\omega = 1$	$\delta = 0$	$V = 0$	$T = 2\pi$	$f = \frac{1}{2\pi}$
b)	$\omega = 6\pi$	$\delta = 0$	$V = 0$	$T = \frac{1}{3}$	$f = 3$
c)	$\omega = \frac{\pi}{12}$	$\delta = \frac{3\pi}{4}$	$V = 9$	$T = 24$	$f = \frac{1}{24}$
d)	$\omega = 3$	$\delta = \frac{\pi}{6}$	$V = \frac{\pi}{18}$	$T = \frac{2\pi}{3}$	$f = \frac{3}{2\pi}$
e)	$\omega = 6\pi$	$\delta = 0.6\,\pi$	$V = 0.1$	$T = \frac{1}{3}$	$f = 3$
f)	$\omega = \frac{\pi}{120}$	$\delta = \frac{\pi}{8}$	$V = 15$	$T = 240$	$f = \frac{1}{240}$

2. Aufgabe (Seite 5)

$T = 12$ $\qquad f = \frac{1}{12}$ $\qquad \omega = \frac{\pi}{6}$ $\qquad \delta = \frac{5\pi}{6}$ $\qquad V = 5$

3. Aufgabe (Seite 5)

a) $2 \cdot 3 = T$ $\qquad T = 6$ $\qquad f = \frac{1}{6}$ $\qquad \delta = 0$ $V = 0$ $\qquad \omega = \frac{\pi}{3}$

b) $f = \frac{7}{24}$ $\qquad T = \frac{24}{7}$ $\qquad \delta = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$ $\qquad \omega = 2\pi f = \frac{7\pi}{12}$ $\qquad V = \frac{1}{7}$

c) $T = 6$ $\qquad f = \frac{1}{6}$ $\qquad \omega = \frac{\pi}{3}$ $\qquad \delta = \frac{4\pi}{3}$ $\qquad V = 4$

2. Aufgabe (Seite 9)

a) $T = 2.15 \text{ ms} = \frac{215}{100000} \text{ s} = \frac{43}{20000} \text{ s}$ $\qquad f = \frac{20000}{43} \text{ Hz} \approx 465.1 \text{ Hz}$

$V \approx 0.6 \text{ ms}$

b) $T = 9.5 \text{ ms} = \frac{95}{10000} \text{ s} = \frac{19}{2000} \text{ s}$ $\qquad f = \frac{2000}{19} \text{ Hz} \approx 105.3 \text{ Hz}$

$V \approx 4 \text{ ms}$

c) $T = \frac{5.15}{3} \text{ ms} = \frac{515}{300000} \text{ s} = \frac{103}{60000} \text{ s}$ $\qquad f = \frac{60000}{103} \text{ Hz} \approx 583 \text{ Hz}$

$T \approx 1.72 \text{ ms}$ $\qquad V \approx 3.1 - 2 \cdot 1.72 = 0.34 \text{ ms}$