

GRADUS SUAVITATIS
EINFÜHRUNG

DIE QUELLE

1739 ist in St. Petersburg erschienen:

TENTAMEN
NOVAE THEORIAE
MVSICAE
EX
CERTISSIMIS
HARMONIAE PRINCIPIIS
DILVCIDE EXPOSITAE.
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO.

Darin führt Euler den «Gradus Suavitatis» ein, was etwa «Grad der Lieblichkeit» bedeutet. Damit soll ein klares Maß für den Wohlklang von Intervallen definiert werden.

DEFINITION

Der Eulersche Gradus Suavitatis (kurz: G) ist eine Funktion, welche den Wohlklang von Zweiklängen – also Intervallen – bewertet. Das Intervall erster – und damit ist gemeint: bester – Güte ist die Prim:

$$G(1/1) = 1$$

Das Intervall zweiter Güte ist die Oktav:

$$G(2/1) = G(1/2) = 2$$

G ist nur definiert für Intervalle, welche durch Brüche dargestellt werden können. G wird nach dem folgenden Rezept bestimmt:

- 1) Verwandeln Sie das Intervall «Zähler/Nenner» zuerst in einen gekürzten Bruch a/b .
- 2) Bestimmen Sie dann den so genannten Produktwert $a \cdot b$.
- 3) Nun zerlegen Sie den Produktwert in Primfaktoren:

$$a \cdot b = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$$

- 4) Dann berechnen Sie G so:

$$G(\text{Zähler/Nenner}) = 1 + (p_1 - 1) + (p_2 - 1) + (p_3 - 1) + \dots + (p_n - 1)$$

ERSTES BEISPIEL

$$\begin{aligned} \text{Zähler:Nenner} &= 12/15 = 4/5 \\ \text{Produktwert} &= 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ G(12/15) &= 1 + (2-1) + (2-1) + (5-1) = 7 \end{aligned}$$

ZWEITES BEISPIEL

$$\begin{aligned} \text{Zähler:Nenner} &= 2/18 = 1/9 \\ \text{Produktwert} &= 9 = 3 \cdot 3 \\ G(2/18) &= 1 + (3-1) + (3-1) = 5 \end{aligned}$$

GRADUS SUAVITATIS
TABELLE & PROGRAMM

TABELLE (1.AUFGABE)

Berechnen Sie die fehlenden G-Werte in der folgende Tabelle. In der ersten Zeile steht der Zähler, in der ersten Spalte der Nenner.

G	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	3	5	4	7		5
2	2	1	4	2			8		
3	3	4	1	5		2	9	6	
4	3	2	5	1	7		9		7
5	5			7	1		11		
6	4		2			1	10		4
7	7	8	9	9	11	10	1		11
8			6					1	
9	5			7		4	11		1

TI-BASIC-PROGRAMM (fakultativ)

Entwerfen Sie ein Programm, das zu einem Paar (Zähler | Nenner) von natürlichen Zahlen

in einem ersten Programmteil: das Zahlenpaar (a | b) liefert, welches dem gekürzten Bruch entspricht;

in einem zweiten Programmteil: aus dem Produkt $p = a \cdot b$ den Eulerschen Gradus berechnet.

Dabei wird der Test, ob T ein Teiler von P ist, am einfachsten so formuliert:

`If P/T = int(P/T) Then`

Geben Sie das Programm in Ihren TI-Rechner ein.

Testen Sie das Programm.

GRADUS SUAVITATIS

THEORIE UND PRAXIS

EULERS GRADUS

Bezüglich des Wohlklangs werden durch Eulers Gradus die einfachsten reinen Intervalle so rangiert:

Rang 1	Prim (1/1)
Rang 2	Oktav (2/1)
Rang 3	Duodezim (3/1), Doppeloktav (4/1)
Rang 4	Quint (3/2)
Rang 5	Quart (4/3)
Rang 6	Undezim (8/3)
Rang 7	große Terz (5/4), große Sext (5/3)
Rang 8	kleine Terz (6/5), große Sekund (9/8), kleine Sext (8/5)
Rang 9	kleine Sept (9/5)
Rang 10	große Sekund (10/9)

IHR GESCHMACK (2. AUFGABE, RESULTATBLATT 1)

Auf dem CD-Player laufen pausenlos Paare von Zweiklänge in reinen Intervallen, die Sie miteinander vergleichen sollen. Hören Sie sich unter dem Kopfhörer diese Zweiklang-Paare an und setzen Sie Ihre Bewertung mit dem passenden der Zeichen «<» bzw. «>». Das Zeichen «<» steht für «besser als», das Zeichen «>» für «schlechter als».

VERGLEICH (3. AUFGABE, RESULTATBLATT 2)

Die Intervalle aus der 2. Aufgabe werden aufgedeckt. Tragen Sie von jedem Intervall den Eulerschen Gradus ein und setzten Sie bei jedem Paar das passende der Zeichen «<» bzw. «>». Vergleichen Sie Ihre Einschätzung des Wohlklangs mit der von Euler.

MACHEN MATHEMATISCHE FORMELN SINN?

(4. AUFGABE, RESULTATBLATT 3)

Schreiben Sie einen kurzen Text, in dem Sie – zum Beispiel – auf Fragen wie die folgenden eingehen:

Kennen sie andere Fälle, in denen versucht wird mit einer mathematischen Formel einen komplexen Zusammenhang in den Griff zu bekommen?

Gibt es darunter Fälle, in denen das Unterfangen sinnvoll erscheint?

Gibt es darunter Fälle, in denen das Unterfangen unsinnig erscheint?

Was meinen Sie zu Eulers Versuch, den Wohlklangsgrad von Intervallen mit einer mathematischen Funktion in den Griff zu bekommen?

GRADUS SUAVITATIS
LÖSUNGEN

TI-83 PROGRAMM

```
: Prompt Z,N
: min(Z,N)→M
: M→T
: While T>1
: Z/T→U
: N/T→U
: If <int(U)=U> and <int(U)=U>
: Then
: U→Z
: U→N
: Else
: T-1→T
: End
: End
: Disp Z,N
: Pause
: Z*N→P
: 1→G
: 2→S
: While S≤P
: P/S→W
: If W=int(W)
: Then
: G+S-1→G
: W→P
: Else
: S+1→S
: End
: End
: Disp G
```